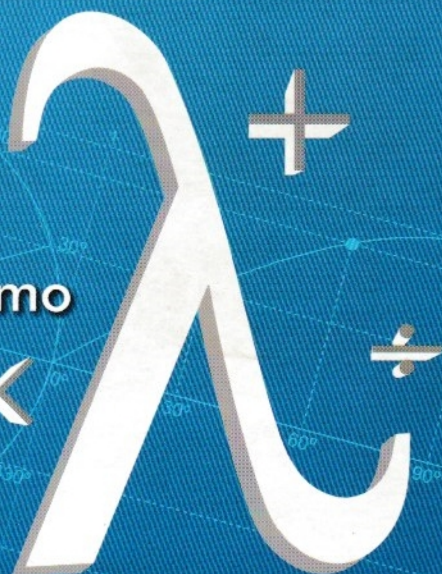
Colección Lambda

Logaritmación en $\mathbb{R}$

Teoría y práctica

Función exponencial
Logaritmos
Función logarítmica
Cologaritmo y antilogaritmo



ÁLGEBRA



Juan Carlos Ramos Leyva

Entremos juntos en este apasionante dominio del álgebra

LOGARITMACIÓN EN $\mathbb{R}$

FUNCIÓN EXPONENCIAL
LOGARITMOS
FUNCIÓN LOGARÍTMICA
COLOGARITMO Y ANTILOGARITMO

Teoría y Problemas Selectos

Juan Carlos Ramos Leyva

GRUPO EDITORIAL



Megabyte



Primera Edición 2016

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N° 2016-03491 (Ley N° 26905 / D.S. N° 017-98-ED)
R.U.C.N° 20507993444

Autor
Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

Diseño de carátula y Diagramación
© Departamento de Edición y Producción GEM

Logaritmación en ℝ
Función Exponencial y Logarítmica



Distribución y Ventas
Jr. Rufino Torrico 889 of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110

www.editorialmegabyte.com

Presentación

Quizá todas las personas coincidan en pensar que mientras tengamos vida podemos, si nos proponemos, vencer todo obstáculo existente, en ocasiones con ayuda de un ser querido o un buen amigo que sepa encaminarte cuando te creas perdido.

La vida es una constante de retos que debemos enfrentar con éxito, cada día que pasa es un triunfo para nosotros, debemos dejar de lado el pasado vivir bien el presente, pues de ello depende nuestro futuro.

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA es una obra que me animé a escrib ir con el ún ico objetivo de cubrir ese vacío existente de material teórico - práctico no tan riguroso, pero si ceñido a la formalidad que la ciencia exige.

El contenido de esta obra víncula tres etapas bien definidas.

1. Exposición de la teoría clara y concreta acompañada de ejercicios de aplicación.
2. Serie de ejercicios y problemas resueltos ordenados secuencialmente según el grado de dificiultad.
3. Serie de ejercicios y problemas propuestos.

Sin lugar a duda esta obra permitirá que el estudiante asimile un mayor dominio de este tema tan importante dentro de la matemática.

Finalmente agradezco al Grupo Editorial **Megabyte** por hacer posible esta publicación esperando que tenga la misma acogida que las presentadas anteriormente, me despido de todos mis amigos, estudiantes y colegas de quienes siempre espero sus críticas que para mi es muy grato. Hasta pronto.

Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

Índice

Función Exponencial y Logarítmica

1. NOCIÓN DE POTENCIAS EN EL CONJUNTO $\mathbb{R}$

1.1 DEFINICIONES

1.1A) Exponente Natural: $\forall a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ a & ; n = 1 \\ a.a.a.a.a....\text{"n" factores} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $2^0 = 1$; $\sqrt{3}^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$; $-2^0 = -1$; $0^0 = 1$
- $3^1 = 3$; $\sqrt[4]{7}^1 = \sqrt[4]{7}$; $(-12)^1 = -12$; $\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$; $-5^1 = -5$; $0^1 = 1$
- $5^2 = 5 \cdot 5$; $\sqrt[3]{2}^4 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$.

1.1B) Exponente Negativo: $\forall\ a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}\ ;\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

* $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1}=\frac{4}{3}$; $\sqrt[5]{2}^{-3}=\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^{3}$

1.1C) Exponente Racional:

$\forall a \in \mathbb{R}^{+}$; $m,n \in \mathbb{Z} / n \geq 1$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}=\sqrt[n]{a}^{m}$$

Ejemplos:

* $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^{2}}=\sqrt[3]{8}^{2}=2^{2}=4$

* $5^{-\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{5^{-1}}=\sqrt[4]{5}^{-1}=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

1.2 TEOREMAS

1.2A) $a^{m}\cdot a^{m}=a^{m+n}$

1.2B) $\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$; $a \neq 0$

1.2C) $(a^{m})^{n}=a^{mn}$

1.2D) $(a^{m}.b^{n})^{p}=a^{mp}.b^{np}$

1.2E) $\left(\frac{a^{m}}{b^{n}}\right)^{p}=\frac{a^{mp}}{b^{np}}$; $b \neq 0$

1.2F) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

1.2G) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

1.2H) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$

1.3 PROPIEDADES

1.3A) $\sqrt[m]{a^{x}\cdot\sqrt[n]{b^{y}}}=\sqrt[mn]{a^{nx}\cdot b^{y}}$

1.3B) $\sqrt[m]{a^{x}\cdot\sqrt[n]{a^{y}}}=\sqrt[mn]{a^{nx+y}}$

Observaciones:

i)Los teoremas y las propiedades son válidas en $\mathbb{R}$ si cada expresiòn que interviene en la fòrmula tambièn es un elemento de $\mathbb{R}$.

ii) Los enunciados matemáticos (fórmulas) citados hasta aquí son suficientes para abordar las funciones exponenciales y logarítmicas.

Ejercicio 01

Reducir:

$$E=8^{-3^{-1}}+16^{-4^{-1}}+32^{-5^{-1}}$$

Resolución:

Dando uso de las definiciones en cada uno de los sumandos, tenemos:

$$E=8^{-\frac{1}{3}}+16^{-\frac{1}{4}}+32^{-\frac{1}{5}}$$

$$E=\sqrt[3]{8}^{-1}+\sqrt[4]{16}^{-1}+\sqrt[5]{32}^{-1}$$

$$E=2^{-1}+2^{-1}+2^{-1}$$

$$E=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad E=\frac{3}{2}$$



Ejercicio 02

Si x > 1, simplificar:

$$K=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}}....60\text{ factores}}{\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\ ......\ 24\text{ factores}}}$$

Resolución:

Dando uso de los teoremas y las definiciones, la expresión propuesta se representa así:

$$K=\frac{\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[6]{x}\cdot\ ....\ 60\text{ factores}}{\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\ ....\ 24\text{ factores}}}$$

$$K=\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^{60}}{\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^{24}}}=\frac{x^{10}}{\left(\sqrt{x}\right)^{12}}=\frac{x^{10}}{x^{6}}=x^{10-6}$$

$$\therefore\ K=x^4$$

Ejercicio 03

Si $m\in\mathbb{R}^+$ Simplificar:

$$E=\frac{5^{m+3}-5^{m+2}+5^{m+1}}{5^{m+2}-5^{m}}$$

Resolución:

De acuerdo con el teorema 1.2A y la primera definición, procedemos de la manera siguiente.

$$E=\frac{5^m\cdot5^3-5^m\cdot5^2+5^m\cdot5}{5^m\cdot5^2-5^m}$$

$$E=\frac{5^m\cdot\left(5^3-5^2+5\right)}{5^m\cdot\left(5^2-1\right)}=\frac{5^3-5^2+5}{5^2-1}$$

$$E=\frac{125-25+5}{25-1}=\frac{105}{24}$$

$$\therefore\ E=\frac{35}{8}$$

Ejercicio 04

Mostrar el equivalente de:

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt[5]{x^3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^2}}\ ;\ x>1$$

Resolución:

Dando uso de la segunda propiedad y el sexto teorema, la expresión dada se puede reescribir así:

$$E=\sqrt[15]{x^{13}}\cdot\sqrt[15]{x^2}$$

$$E=\sqrt[15]{x^{13}x^2}=\sqrt[15]{x^{15}}$$

$$\therefore\ E=x$$

2. FUNCIÓN EXPONENCIAL

2.1 DEFINICIÓN

Siendo b un número positivo diferente de la unidad, la función exponencial se define de la manera siguiente:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,y=F(x)=\exp_b(x)=b^x$$

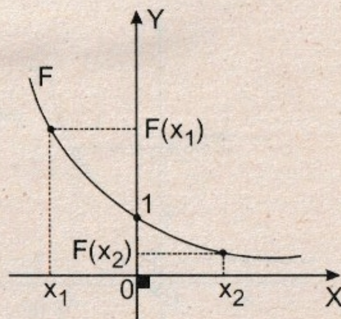
Donde:

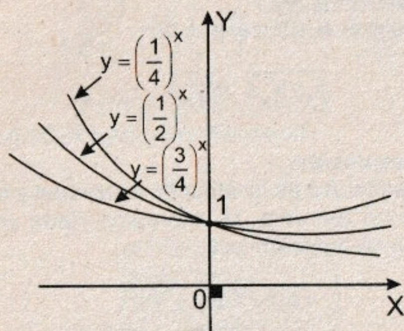
$\mathrm{Dom}(F)=\langle-\infty;\infty\rangle=\mathbb{R}$;

$\mathrm{Ran}(F)=\langle0;\infty\rangle=\mathbb{R}^+$

2.2 REPRESENTACION GRÁFICA

2.2A) $y=F(x)=b^x$; $0<b<1$





a. F es decreciente en todo su dominio, esto es:

$\forall x_1; x_2 \in \text{Dom}(F): \text{si } x_1 < x_2, \text{entonces } F(x_1) > F(x_2)$

b. Si x crece ilimitadamente, entonces F(x) se aproxima a cero

c. Si x decrece ilimitadamente, entonces F(x) crece ilimitadamente

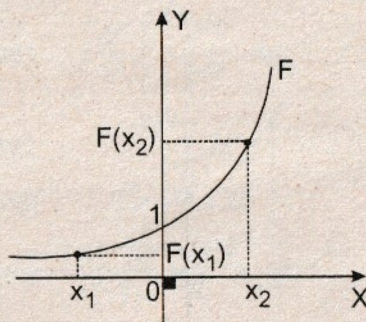
d. $\forall x \in \langle -\infty; 0\rangle \wedge 0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < .... < b_n < 1:$

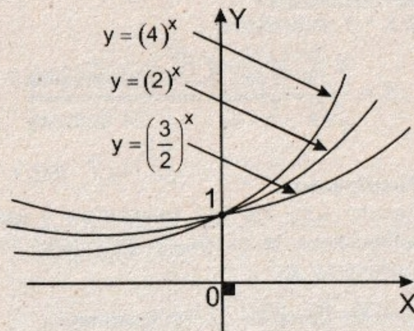
$(b_1)^x > (b_2)^x > (b_3)^x > ..... > (b_n)^x$

e. $\forall x \in \langle 0; \infty\rangle \wedge 0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < .... < b_n < 1:$

$(b_1)^x < (b_2)^x < (b_3)^x < .... < (b_n)^x$

2.2B) $y = F(x) = b^x \; ; b > 1$





a. F es creciente en todo su dominio, esto es:

$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(F): \text{si } x_1 < x_2, \text{entonces}: F(x_1) < F(x_2)$

b. Si x crece ilimitadamente, entonces F(x) crece ilimitadamente

c. Si x decrece ilimitadamente, entonces F(x) se aproxima a cero

d. $\forall x \in \langle -\infty; 0\rangle \wedge 1 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < .... < b_n:$

$(b_1)^x > (b_2)^x > (b_3)^x > .... > (b_n)^x$

e. $\forall x \in \langle 0; \infty\rangle \wedge 1 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < .... < b_n:$

$(b_1)^x < (b_2)^x < (b_3)^x < .... < (b_n)^x$

2.2C) Conclusiones de las Gráficas

a. La gráfica de $y = F(x) = b^x$ intercepta al eje de ordenadas en el punto (0;1)

b. y = 0 es la asíntota horizontal de $y = F(x) = b^x$

c. La función es continua en todo su dominio

d. La función es inyectiva en todo su dominio, por tanto tiene inversa



Ejercicio 05

Determine el dominio y el rango de la siguiente función

$$F = \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = 5^x + 2$$

Resolución:

i) Dominio : observa que $x \in \mathbb{R}$ luego $Dom(F) = \mathbb{R}$

ii) Rango : observa que $5^x > 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$

Sumando : $5^x + 2 > 2 \; ; \; y > 2 \leftrightarrow y \in \langle 2;\infty \rangle$

$$\therefore \; Ran(F) = \langle 2;\infty \rangle$$

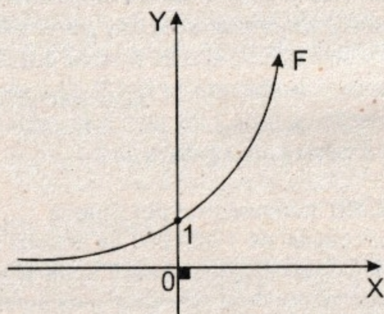
Ejercicio 06

Esbozar la gráfica de la función F, donde

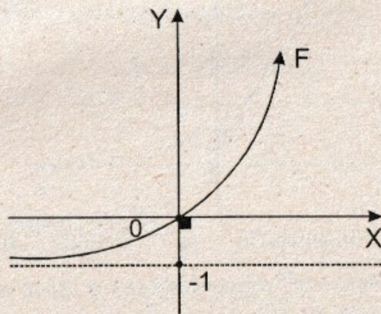
$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = 6^x - 1$$

Resolución:

i) Grafiquemos $y = 6^x$



ii) Ahora al desplazar una unidad hacia abajo la gráfica anterior obtenemos la gráfica de F.



Ejercicio 07

Esbozar la gráfica de la siguiente función

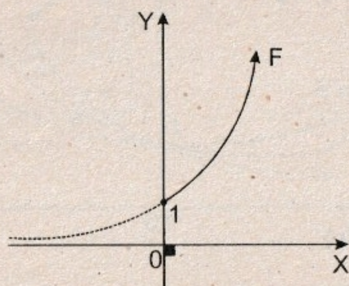
$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) = \pi^{|x|}$$

Resolución:

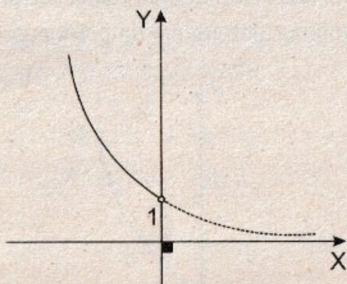
Redefiniendo la función tenemos:

$$y = F(x) = \begin{cases} \pi^x \; ; \; x \geq 0 \; \; ...(i) \\ \pi^{-x} \; ; \; x < 0 \; \; ...(ii) \end{cases}$$

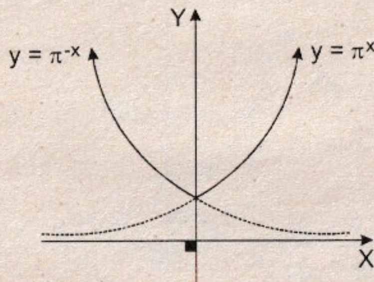
i) Corresponde a una función exponencial con base mayor que la unidad reestringida al dominio $x \geq 0$.



ii) Corresponde a una función exponencial con base entre cero y uno, $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$, rees-tringida al dominio $x < 0$.



iii) Finalmente la gráfica de $y = F(x) = \pi^{|x|}$ viene dada por la unión de las gráficas anteriores, veamos:



Observación:

Siendo $b > 1$, las gráficas de $y = b^x \wedge y = b^{-x}$ son simétricas respecto al eje de ordenadas (eje y)

2.3 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

El crecimiento exponencial es frecuente en la naturaleza (cultivos de microorganismos, poblaciones animales o vegetales)

También sirve para describir fenómenos económicos. Veamos algunos casos:

2.3A) Crecimiento de una Población

Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición). Esto se realiza más o menos rápidamente según las condiciones del medio en que se encuentren (cultivo). Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que, inicialmente, hay una ameba. El número aproximado de amebas que habrá al cabo de «**t**»horas es: $N = 2^t$. Su gráfica es idéntica al caso 2.2B, pero sólo válida para los valores no negativos de **t**.

2.3B) Crecimiento del Dinero

Un capital de 1 000 000 de dólares está en un banco colocado al 2% mensual; lo que quiere decir que cada mes aumenta el 2% y, por tanto, el capital inicial se multipli por 1,02.

La expresión que nos da el capital acumulado al cabo de «**t**» meses es:

$$C = 1\,000\,000.\ (1{,}02)^t$$

2.3C) Desintegración Radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran transformándose en otras sustancias diferentes y lo hacen con mayor o menor rapidez dependiendo de la sustancia que



se desintegra. Si tenemos una cantidad inicial C_o de una sustancia radiactiva que se desintegra reduciéndose a la mitad cada 5 años, la cantidad de sustancia radiactiva que queda al cabo de «**t**» años es:

$$C = C_o\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{2}} = C_o\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^t = C_o(0{,}8705)^t$$

Al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa de una sustancia radiactiva se le llama periodo de semidesintegración.

2.4 ECUACIONES EXPONENCIALES

Se llaman ecuaciones exponenciales a todas aquellas ecuaciones donde la incógnita forma parte de algún exponente. Algunos ejemplos son:

$$2^x = \sqrt{8}^{x-1};\ 4^{3^x-1} = \sqrt{2};\ 3^x + 4^x = 5^x$$

La resolución de las ecuaciones exponenciales se puede efectuar por comparación (Teorema o propiedad), logaritmos, o aproximación (aplicación de las derivadas)

2.4A) Teorema

$$b^x = b^y \rightarrow x = y\ ;\ \forall\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

2.4B) Propiedad

$$a^x = b^y \rightarrow x = 0\ ;\ a,b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} / a \neq b$$

Ejercicio 08

Resolver:

$$\sqrt[3]{25}^{x-1} = 125^x$$

Resolución:

Expresamos cada potencia en función de la base cinco.

$$\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^{x-1} = \left(5^3\right)^x \leftrightarrow \sqrt[3]{5}^{2x-2} = 5^{3x}$$

$$5^{\frac{2x-2}{3}} = 5^{3x} \rightarrow \frac{2x-2}{3} = 3x$$

$$2x - 2 = 9x \leftrightarrow 7x = -2$$

$$x = -\frac{2}{7}$$

$$\therefore\ CS = \left\{-\frac{2}{7}\right\}$$

Ejercicio 09

Resolver:

$$\sqrt{7}^{2x-1} = \pi^{x-0{,}5}$$

Resolución:

La ecuación dada es: $\sqrt{7}^{2x-1} = \pi^{x-\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{7}^{2x-1} = \pi^{\frac{2x-1}{2}}$$

$$\sqrt{7}^{2x-1} = \sqrt{\pi}^{2x-1}$$

Por propiedad tenemos:

$$2x - 1 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ CS = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Ejercicio 10

Resolver:

$$2^{2x+1} + 1 = 3.2^x$$

Resolución:

La ecuación dada es:

$$2^{2x+1} - 3.2^x + 1 = 0$$

$$2.2^{2x} - 3.2^x + 1 = 0$$

$$2.(2^x)^2 - 3.(2^x) + 1 = 0$$

Según aspa simple:

$$\left[2(2^x) - 1\right]\cdot\left[(2^x) - 1\right] = 0$$



De donde tenemos:

$$2(2^x)=1 \vee 2^x=1$$

$$2^{x+1}=1 \vee 2^x=1$$

$$2^{x+1}=2^0 \vee 2^x=2^0$$

Por teorema: $x+1=0 \vee x=0$

$$x=-1 \vee x=0$$

$$\therefore CS=\{-1;0\}$$

2.5 INECUACIONES EXPONENCIALES

Se llaman inecuaciones exponenciales a todas aquellas inecuaciones donde la incógnita forma parte de algún exponente. Algunos ejemplos son:

$$7^{x-1}>\sqrt{7}$$

$$2\sqrt{2}^{2x-1}\leq 0,5$$

$$3^{x^2-1}<5^x$$

2.5A) Primera Forma:

Con 0 < b < 1

a) Si $b^x>b^y$, entonces x < y

Si $b^x<b^y$, entonces x > y

b) Si $b^x\geq b^y$, entonces $x\leq y$

Si $b^x\leq b^y$, entonces $x\geq y$

2.5B) Segunda Forma:

Con b > 1

a) Si $b^x>b^y$, entonces x > y

Si $b^x<b^y$, entonces x < y

b) Si $b^x\geq b^y$, entonces $x\geq y$

Si $b^x\leq b^y$, entonces $x\leq y$

Ejercicio 11

Resolver:

$$5^{x^2-10}>125^x$$

Resolución:

En función de la base cinco:

$$5^{x^2-10}>5^{3x}$$

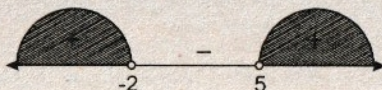
De acuerdo con la forma

$$x^2-10>3x$$

$$x^2-3x-10>0$$

$$(x-5)(x+2)>0$$

En la recta tenemos:



$$\therefore CS=\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle 5;\infty\rangle$$

Ejercicio 12

Resolver:

$$(0,25)^{2x-3}\geq\sqrt{\frac{1}{16}}$$

Resolución:

La inecuación dada es

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}\geq\frac{1}{4}$$

Según la forma tenemos:

$$2x-3\leq 1$$

$$2x\leq 4$$

$$x\leq 2$$

$$\therefore CS=\langle-\infty;2]$$

Ejercicio 13

Cuántas soluciones reales tiene la ecuación.

$$3^x+|x|-2=0$$



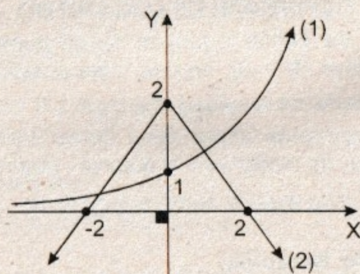
Resolución:

La ecuación dada es: $3^x = 2-|x|$
Reescribiendo tipo sistema:

$$3^x = 2-|x| = y$$

$$\begin{cases} y = 3^x & \text{....(1)} \\ y = 2-|x| & \text{....(2)} \end{cases}$$

Ahora graficando (1) y (2) en un mismo plano cartesiano determinamos los puntos de intersección, cada punto representa una solución de la ecuación propuesta inicialmente.



Como (1) y (2) se intersectan en dos puntos concluimos que la ecuación propuesta tiene 2 soluciones reales.

Ejercicio 14

Resolver:

$$2^x + x \geq 1$$

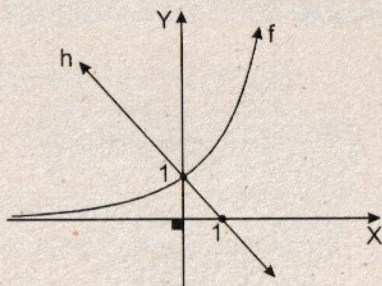
Resolución:
La inecuación dada es:

$$2^x \geq 1 - x \leftrightarrow f(x) \geq h(x) \quad ...(1)$$

Donde podemos observar:

$$\begin{cases} y = f(x) \text{ "Función exponencial"} \\ y = h(x) \text{ "Función lineal"} \end{cases}$$

Graficando f y h tenemos



Fácilmente podemos notar que f(x) = h(x) cuando x = 0; asimismo observamos que $f(x) > h(x)$ cuando x > 0

Ahora podemos plantear:

$$f(x) \geq h(x) \rightarrow x \in [0;\infty\rangle$$

$$\therefore\ CS = [0;\infty\rangle$$

Ejercicio 15

Esbozar la gráfica de la siguiente relación.

$$R = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 3^x \wedge y \geq 3^{-x} \wedge x + y \leq 3\}$$

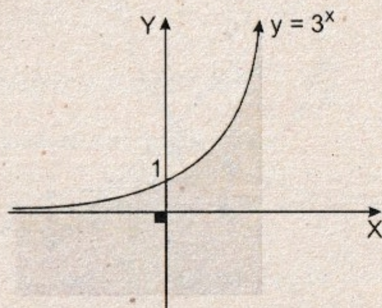
Resolución:
Supongamos que:

$$R_1 : y \leq 3^x \ ;\ R_2 : y \geq 3^{-x} \ ;\ R_3 : x + y \leq 3$$

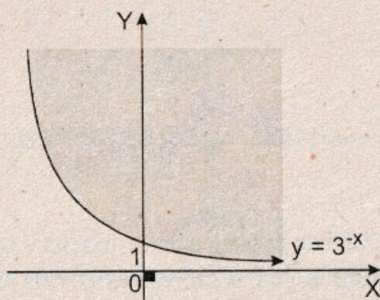
Luego se cumple que:

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$$

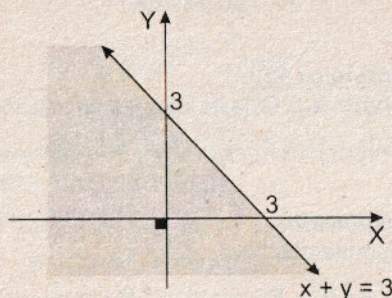
Graficando R_1



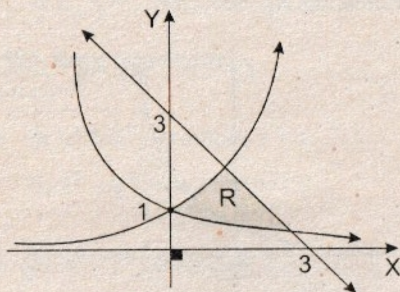
Graficando R_2



Graficando R_3



Finalmente la gráfica de R será:



3. LOGARITMACIÓN EN $\mathbb{R}$

3.1 INTRODUCCIÓN

La logaritmación es el proceso mediante el cual se determina un logaritmo. Los logaritmos fueron divulgados en 1 614 por el matemático esoces John Napier, que determinó sus propiedades a partir de la relación existente entre las progresiones aritméticas y geométricas. Gracias a este potente instrumento de cálculo Newton y Kepler pudieron establecer sus leyes, que supusieron una auténtica revolución en el cambpo de la Astronomía.

3.2 DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Se define logaritmo de un número positivo (N > 0), en una base positiva y diferente de la unidad ($b > 0 \wedge b \neq 1$) como el exponente (x) que debe afectar a dicha base, de modo que la potencia obtenida (b^x) sea igual al número propuesto.

3.2A) Notación

$$\log_b N = x \qquad ....(1)$$

Donde:
log = Operador de la logaritmación
N = Número propuesto ; N >0
b = Base del logaritmo; $b > 0 \wedge b \neq 1$
x = Logaritmo ; $x \in \mathbb{R}$

3.2B) Definición

$$\boxed{b^x = N} \qquad ....(2)$$

Ejemplos:

* $7^x = 5 \leftrightarrow x = \log_7 5$
* $3^m = 12 \leftrightarrow m = \log_3 12$
* $16^n = 11 \leftrightarrow n = \log_{16} 11$



Ejercicio 16

Calcular el logaritmo de 8 en base 4

Resolución:

Supongamos que «x» sea el logaritmo solicitado, luego podemos plantear:

$\log_4 8 = x$

Por definición:

$$4^x = 8$$

$$2^{2x} = 2^3 \rightarrow 2x = 3$$

$$\therefore\ x = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 17

Calcular «x» si:

$$\log_x(6+x) = 2$$

Resolución:

Según la definición: $x^2 = 6 + x$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

De donde obtenemos:

$$x = 3 \vee x = -2$$

Como x es base, x > 0:

$$\therefore\ x = 3$$

3.3 PROPIEDADES GENERALES

3.3A) Logaritmo de la Unidad

$$\text{Log}_b 1 = 0\ ;\ \forall\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

3.3B) Logaritmo de la Base

$$\text{Log}_b b = 1\ ;\ \forall\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

3.4 PROPIEDADES OPERATIVAS

3.4A) $\forall M,N > 0\ ;\ \forall\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}:$

$$\log_b(M.N) = \log_b M + \log_b N$$

Demostración:

Sean los logaritmos: $\log_b M = x$

$\log_b N = y$

Según la definición: $b^x = M$

$b^y = N$

Multiplicando m.a.m: $b^{x+y} = M.N$

De acuerdo con la definición:

$$\log_b(M.N) = x + y$$

$$\therefore\ \log_b(M.N) = \log_b M + \log_b N$$

3.4B) $\forall M,N > 0\ ;\ \forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$$

Demostración:

Sean los logaitmos: $\log_b M = x$

$\log_b N = y$

Según la definición: $b^x = M$

$b^y = N$

Al dividir m.a.m tenemos: $b^{x-y} = \frac{M}{N}$

De acuerdo con la definición:

$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = x - y$$

$$\therefore\ \log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$$

3.4C) $\forall M>0$; $\forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$; $\forall p\in\mathbb{R}$:

$$\log_b M^p = p.\log_b M$$

Demostración:

Sea el logaritmo: $\log_b M = x$

Según la definición: $b^x = M$

Elevando al exponente «p»:

$$(b^x)^p = M^P$$

Por teorema tenemos: $(b^P)^x = M^P$

$$b^{p.x} = M^P$$

De acuerdo con la definición:

$$\log_b M^P = p.x$$

$$\therefore \log_b M^P = p.\log_b M$$

3.4D) $\forall M>0$; $\forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$; $\forall p\in\mathbb{R}-\{0\}$:

$$\log_b M = \log_{(b^P)}(M^P)$$

Demostración:

Sea el logaritmo: $\log_b M = x$

Según la definición: $b^x = M$

Elevando al exponente «p»: $(b^x)^P = M^P$

Por teorema tenemos $(b^P)^x = M^P$

De acuerdo con la definición:

$$\log_{(b^P)} M^P = x$$

Por el axioma de simetría:

$$x = \log_{(b^P)}(M^P)$$

$$\therefore \log_b M = \log_{(b^P)}(M^P)$$

3.5 PROPIEDADES ADICIONALES

3.5A) $\forall N>0$; $b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$:

$$b^{\log_b N} = N$$

3.5B) $\forall a,c>0$; $b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

3.5C) $\forall N>0$; $b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$; $m\in\mathbb{R}-\{0\}$:

$$\log_b \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m}\cdot\log_b N$$

3.5D) $\forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$; $m,n\in\mathbb{R}/n\neq 0$:

$$\log_{(b^n)}(b^m) = \frac{m}{n}$$

3.5E) $\forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$; $m,n\in\mathbb{R}-\{0\}$:

$$\log_{(\sqrt[n]{b})}(\sqrt[m]{b}) = \frac{n}{m}$$

3.5F) $\forall b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$; $\forall m\in\mathbb{R}$:

$$\log_b b^m = m$$

Ejercicio 18

Reducir:

$$E = \log_x \sqrt[5]{x} + \log_x x^4 - \log_{(x^2)} x^3 \; ; \; x>1$$

Resolución:

La expresión dada es:

$$E = \log_x x^{\frac{1}{5}} + \log_x x^4 - \log_{(x^2)}(x^3)$$



Por propiedades:

$$E=\frac{1}{5}\cdot\log_x x+4\cdot\log_x x-\frac{3}{2}$$

$$E=\frac{1}{5}\cdot 1+4\cdot 1-\frac{3}{2}$$

$$E=\frac{1}{5}+4-\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ E=\frac{27}{10}$$

Ejercicio 19

Calcular:

$$K=\log_{\left(\frac{4}{25}\right)}\log_{32}4$$

Resolución:

La expresión dada es:

$$K=\log_{\left(\frac{4}{25}\right)}\log_{(2^5)}(2^2)$$

Por propiedad adicional:

$$K=\log_{\left(\frac{4}{25}\right)}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$K=\log_{\sqrt{\frac{4}{25}}}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$K=\log_{\left(\frac{2}{5}\right)}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ K=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 20

Reducir:

$$E=\log_{25}5+3^{\log_7 10}+\log_{\sqrt[3]{3}}9-10^{\log_7 3}$$

Resolución:

De acuerdo con la propiedad 3.5 B tenemos que:

$$3^{\log_7 10}=10^{\log_7 3}$$

Con lo cuál la expresión dada se transforma en:

$$E=\log_{25}5+\log_{\sqrt[3]{3}}9$$

Por propiedades:

$$E=\log_{\sqrt{25}}\sqrt{5}+\log_{(\sqrt[3]{3})}(9)^3$$

$$E=\log_5\sqrt{5}+\log_3(3^2)^3$$

$$E=\log_5 5^{\frac{1}{2}}+\log_3 3^6$$

$$E=\frac{1}{2}+6$$

$$\therefore\ E=\frac{13}{2}$$

4. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

4.1 DEFINICIÒN

Siendo b un número positivo diferente de la unidad, la función logaritmica se define de la manera siguiente:

$$F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\,/\,y=F(x)=\mathrm{Log}_b x$$

Donde: $\mathrm{Dom}(F)=\langle 0\,;\,\infty\rangle=\mathbb{R}^+$

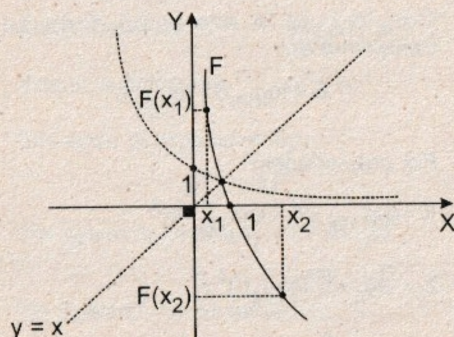
$\mathrm{Ran}(F)=\langle -\infty\,;\,\infty\rangle=\mathbb{R}$

Observación:

Frecuentemente a la función logarítmica en base b se le define como la función inversa de la función exponencial de base b.

4.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

4.2A) $y = F(x) = \log_b x \; ; 0 < b < 1$



a. F es decreciente en todo su dominio, esto es:

> $\forall x_1, x_2 \in Dom(F)$, Si $x_1 < x_2$, entonces $F(x_1) > F(x_2)$

b. Si **x** crece ilimitadamente, F(x) decrece ilimitadamente

c. Si **x** se aproxima a cero, F(x) crece ilimitadamente.

d. $\forall x \in \langle 0;1 \rangle$

$\wedge 0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < .... < b_n < 1$:

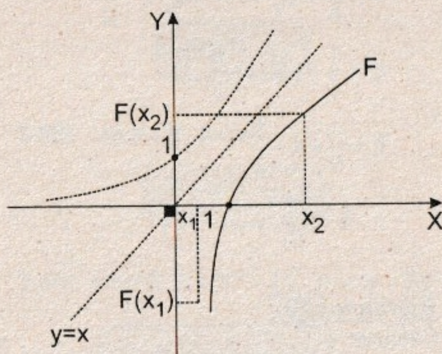
$Log_{b_1} x < Log_{b_2} x < ...... < Log_{b_n} x$

e. $\forall x \in \langle 1;\infty \rangle$

$\wedge 0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < ..... < b_n < 1$

$\log_{b_1} x > \log_{b_2} x > \log_{b_3} x > .... > \log_{b_n} x$

4.2B) $y = F(x) = \log_b x \; ; \; b > 1$



a. F es creciente en todo su dominio, esto es:

> $\forall x_1, x_2 \in Dom(F)$: Si $x_1 < x_2$, entonces $F(x_1) < F(x_2)$

b. Si x crece ilimitadamente, F(x) crece ilimitadamente.

c. Si x se aproxima a cero, F(x) decrece ilimitadamente

d. $\forall x \in \langle 0;1 \rangle \wedge 1 < b_1 < b_2 < b_3 < .... < b_n$:

$\log_{b_1} x > \log_{b_2} x > \log_{b_3} x > .... > \log_{b_n} x$

e. $\forall x \in \langle 1;\infty \rangle \wedge 1 < b_1 < b_2 < b_3 < .... < b_n$:

$\log_{b_1} x < \log_{b_2} x < \log_{b_3} x < .... < \log_{b_n} x$

4.2C) Conclusiones de las Gráficas

a. La gráfica de $y = F(x) = \log_b x$ intercepta al eje de abcisas en el punto (1 ; 0)

b. x = 0 es la asìntota vertical de $y = F(x) = \log_b x$



c. La función es continua en todo su dominio

d. La función es inyectiva en todo su dominio, por tanto tiene inversa.

Ejercicio 21

Determine el dominio y el rango de la siguiente función.

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,y=F(x)=\text{Log}_2(x-4)+3$$

Resolución:

i) Dominio: observa que

$x-4>0\;;\;x>4\leftrightarrow x\in\langle 4;\infty\rangle$

$\therefore\;\; \text{Dom}(F)=\langle 4;\infty\rangle$

ii) Rango: observa que

$\log_2(x-4)\in\mathbb{R}\,\forall x>4$, luego es tácito que $\log_2(x-4)+3\in\mathbb{R}$ con lo cual $\text{Ran}(F)=\mathbb{R}$,

Ejercicio 22

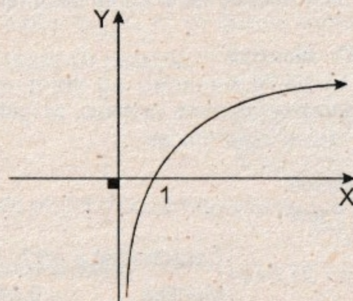
Esbozar la gráfica de la función F, donde

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,y=F(x)=\log_5(x-4)$$

Resolución:

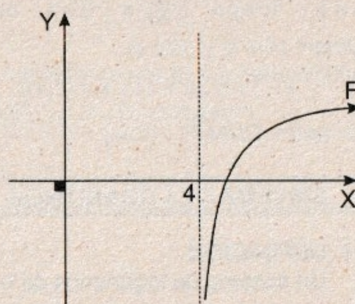
i) Inicialmente graficamos

$y=f(x)=\log_5 x$



ii) Finalmente graficamos

$f(x-4)=F(x)$



Ejercicio 23

Esbozar la gráfica de la siguiente función.

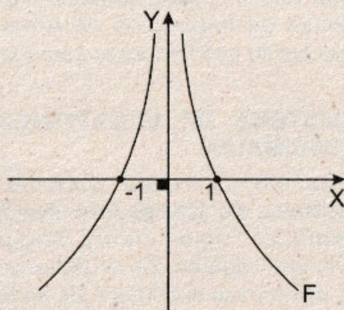
$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,y=F(x)=\log_{0,5}|x|$$

Resolución:

Redefiniendo la función dada, tenemos:

$$F(x)=\begin{cases}\log_{0,5}(x) & ;\ x>0\\ \log_{0,5}(-x) & ;\ x<0\end{cases}$$

Finalmente la gráfica será:



Ejercicio 24

Determine el dominio de la siguiente función.

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,y=F(x)=\sqrt[3]{\log_7(x-1)+x}+10$$

Resolución:

Recordemos que $\sqrt[3]{A} \in \mathbb{R}$, siempre que $A \in \mathbb{R}$, luego $\log_7(x-1)+x$ es un número real si y sólo si:

$$x-1>0\ ;\ x>1 \leftrightarrow x \in \langle 1;\infty \rangle$$

Por tanto: $\text{Dom}(F) = \langle 1;\infty \rangle$

5. SISTEMA DE LOGARITMOS

5.1 DEFINICIÒN

Un sistema de logaritmos de base b $(b>0 \wedge b \neq 1)$ se define como el conjunto de todos los logarítmos de números reales positivos en dicha base.

Ejemplos:

* Sistema de logaritmos en base 2

$$A = \{y \in \mathbb{R} / y = \log_2 x\ ;\ x \in \mathbb{R}^+\}$$

* Sistema de logaritmos en base 0,6

$$B = \{y \in \mathbb{R} / y = \log_{0,6} x\ ;\ x \in \mathbb{R}^+\}$$

Es fácil deducir que así como existen infinitas bases, existen también infinitos sistemas de logaritmos de entre los cuales los de uso frecuente son dos.

5.2 SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES

También llamado sistema de logaritmos de Briggs, en honor al matemático ingles Henry Briggs, o logaritmos vulgares. Es el sistema que tiene como base al número 10, es decir:

$$A = \{y \in \mathbb{R} / y = \log_{10} x\ ;\ x \in \mathbb{R}^+\}$$

Notación utilizada: $y = \log_{10} x = \log x$

Se lee: **«Logaritmo decimal del número x»**

Ejemplos:

* $\log_{10} 2 = \log 2 = 0,3010$
* $\log_{10} 1000 = \log 1000 = 3$

Observación:
Existen tablas logarítmicas donde el lector podrá encontrar logaritmos decimales, a continuación citaremos algunos valores que serán de importancia para resolver algunos problemas.

* log2 = 0,3010 ...
* log3 = 0,4771 ...
* log7 = 0,8450 ...

5.3 FORMA GENERAL DE UN LOGARITMO DECIMAL

Considerando que x > 0, la forma general del logarítmo decimal de x es:

$$\log x = \boxed{\text{Característica}}\ ,\ \boxed{\text{Mantisa}}$$

5.3A) Característica

Es la parte entera, puede ser positiva o negativa, es fácil de calcular.
Si x > 1, la característica es positiva e igual al número de cifras de la parte entera de x disminuido en uno.

Si 0 < x < 1, la característica es negativa y su valor absoluto es igual al número de ceros que van a la izquierda de la primera cifra significativa de x incluyendo al cero ubicado delante de la coma decimal.

5.3B) Mantisa

Es la parte decimal, su valor debe presentarse siempre positivo, se calcula por tablas logarítmicas.

Ejemplos:

* Para

$$\log x = 27,542 \begin{cases} \text{Característica} = 27 \\ \text{Mantisa} = 0,542 \end{cases}$$

* Para $\log 3000 = 3,4771125... \begin{cases} \text{Característica} = 3 \\ \text{Mantisa} = 0,4771.. \end{cases}$

* Para $\log 0,002 = -2,69897 = -2 - 0,69897$

Observa que la mantisa (parte decimal) es negativa, luego hacemos el siguiente artificio.

$$-2 - 0,69897 = \underbrace{-2 + (-1)} + (1) - 0,69897 \Rightarrow -2 - 0,69897 = -3 + (1 - 0,69897)$$

$$-2 - 0,69897 = -3 + 0,30103$$

Ahora tenemos: $\log 0,002 = \overline{3},30103$

Esta última representación indica que sólo la característica es negativa.

* Para $\log 0,02345 = \overline{2},370142... \begin{cases} \text{Característica} = -2 \\ \text{Mantisa} = 0,370142 \end{cases}$

5.4 SISTEMA DE LOGARITMOS NATURALES

También llamado sistema de logaritmos neperianos, en honor al matemático escoces Jhoan Napier, o logaritmos hiperbólicos. Es el sistema que tiene como base el número irracional e = 2,7182...

$$B = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \log_e x \; ; \; x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

Notación utilizada: $y = \log_e x = \ln x$

Se lee: **«logaritmo natural de x»**

Ejemplos:

* $\log_e 20 = \ln 20 = 2,9957$
* $\log_e 100 = \ln 100 = 4,6051$

5.5 CAMBIO DE UN SISTEMA DE LOGARITMOS

Dado $\log_b x$, si se quiere expresarlo en una nueva base «m» recurrimos a la siguiente relación:

$$\log_b x = \log_m x \cdot \frac{1}{\log_m b} \quad ....(1)$$

Donde el factor de conversión es $\frac{1}{\log_m b}$, llamado también módulo de transformación ó módulo de paso.

De (1) tenemos: $\log_b x = \dfrac{\log_m x}{\log_m b}$

«Fórmula para cambio de base»

Ejemplos:

* $\log_2 7$ a base $5 : \log_2 7 = \dfrac{\log_5 7}{\log_5 2}$

* $\log_{12} 25$ a base $17 : \log_{12} 25 = \dfrac{\log_{17} 25}{\log_{17} 12}$

5.5A) Demostración de (1)

Supongamos que:

$$\log_b x = p \leftrightarrow b^p = x$$

$$\log_m x = q \leftrightarrow m^q = x$$

Ahora planteamos: $\dfrac{\log_b x}{\log_m x} = \dfrac{p}{q}$ ...(*)

Observa también que:

$$b^P = m^q \rightarrow b = m^{\frac{q}{p}}$$

$$\log_m b = \log_m m^{\frac{q}{p}} \leftrightarrow \log_m b = \frac{q}{p}$$

Con lo cual tenemos: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{\log_m b}$

Finalmente en (*): $\dfrac{\log_b x}{\log_m x} = \dfrac{1}{\log_m b}$

$$\therefore \log_b x = \log_m x \cdot \frac{1}{\log_m b}$$

5.6 PROPIEDADES

5.6A) Conversión de logaritmos naturales a decimales

$$\log x = 0{,}4343 \cdot \ln x$$

5.6B) Conversión de logaritmos decimales a naturales

$$\ln x = 2{,}3026 \cdot \log x$$

5.6C) Relaciones Notables

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} : \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\forall a,b,x \in \mathbb{R}^+ - \{1\} : \frac{\log_b x}{\log_a x} = \log_b a$$

5.6D) Regla de la Cadena

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge e \in \mathbb{R}^+$$

$$\log_b \cancel{a \cdot \log_a} \cancel{c \cdot \log_c} \cancel{d \cdot \log_d} e = \log_b e$$

«Los números ubicados en forma diagonal son iguales»

Ejemplos:

* $\log_7 \cancel{12 \cdot \log_{12}} 5 = \log_7 5$

* $\log_3 \cancel{5 \cdot \log_5} \cancel{4 \cdot \log_4} 9 = \log_3 9$

$= \log_3 3^2 = 2$

Ejercicio 25

Si «a» es la característica de log 539 y «b» es la característica de log 0,0089. Calcular: ab

Resolución:

De acuerdo con lo expuesto en la teoría procedemos a calcular los valores de a y b.



i) Log 539 :
característica = 3 – 1 = 2 = a

ii) Log 0,0089 :
característica = $\bar{3} = -3 = b$

Finalmente tenemos: ab = (2) (–3)

$$\therefore\ ab = -6$$

Ejercicio 26
Reducir:

$$E = \frac{\log_5 3}{\log_5 4} + \log^{-1}{}_3 4$$

Resolución:
La expresión propuesta es:

$$E = \frac{\log_5 3}{\log_5 4} + \frac{1}{\log_3 4}$$

Según propiedades tenemos:

$$E = \log_4 3 + \log_4 3$$

$$E = 2\log_4 3 = \log_4 3^2$$

$$\therefore\ E = \log_4 9$$

Ejercicio 27

Si $b = 2^{\log_3 x}$.

Determine el valor de:

$$K = \sqrt[4]{3^{\log_x b} + 7b^{\log_x 3}}$$

Resolución:
Dando uso de la segunda propiedad expuesta en el item 3.5, la expresión propuesta podemos reescribir así:

$$K = \sqrt[4]{b^{\log_x 3} + 7b^{\log_x 3}}$$

$$K = \sqrt[4]{8b^{\log_x 3}}$$

Ahora por dato $b = 2^{\log_3 x}$, luego tenemos:

$$K = \sqrt[4]{8(2^{\text{Log}_3 x})^{\log_x 3}}$$

$$K = \sqrt[4]{8 \cdot 2^{\text{Log}_3 x \cdot \log_x 3}}$$

Dando uso de la regla de la cadena conseguimos:

$$K = \sqrt[4]{8 \cdot 2^{\log_3 3}} = \sqrt[4]{8 \cdot 2^1}$$

$$K = \sqrt[4]{8 \cdot 2} \qquad = \sqrt[4]{16}$$

$$\therefore\ K = 2$$

6. COLOGARITMO Y ANTILOGARITMO

6.1 COLOGARITMO (Colog)

$\forall x > 0 ; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Se define el cologaritmo de **x** en base **b** de la manera siguiente:

$$\text{Colog}_b\, x = -\text{Log}_b x = \text{Log}_b \frac{1}{x}$$

Ejemplos:

* $\text{colog}_2 16 = -\log_2 16 = -\log_2 2^4 = -4$
* $\text{colne}^{10} = -\ln e^{10} = -10\ln e = -10$

Observación:
Los teoremas y las propiedades para el cologaritmo son las mismas que las del logaritmo, se recomienda reescribir los cologaritmos en función de logaritmos para luego dar uso de ellas.

6.2 ANTILOGARITMO (Antilog)

$\forall x \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Se define el antilogaritmo de **x** en base **b** de la manera siguiente:

$$\text{Antilog}_b\, x = b^x$$

Ejemplos:

- $\text{Antilog}_2 3 = 2^3 = 8$

  $\text{Antilog}_5 -1 = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

- $\text{Antilog}_7 0 = 2^0 = 1$

  $\text{Antilog}_{12} \sqrt{3} = 12^{\sqrt{3}}$

> **Observación:**
> Al antilogaritmo también se le da el nombre de exponencial y se le puede representar de la manera siguiente:
>
> $$\text{Antilog}_b x = \text{Exp}_b x = b^x$$

6.3 RELACIÓN ENTRE OPERADORES

Suponiendo que:

$\log_b x ; \text{colog}_b x$ y $\text{antilog}_b x$

existen, se cumple que:

6.3A) $\text{antilog}_b(\log_b x) = x$

6.3B) $\text{antilog}_b(\text{colog}_b x) = \dfrac{1}{x}$

6.3C) $\log_b(\text{antilog}_b x) = x$

6.3D) $\text{colog}_b(\text{antilog}_b x) = -x$

Ejercicio 28

Reducir:

$$E = \log_2 4 + \text{colog}_3 27 + \text{antilog}_{49}(0,5)$$

Resolución:

De acuerdo con la definición, la expresión propuesta se puede reescribir así:

$$E = \log_2 2^2 - \log_3 3^3 + (49)^{0,5}$$

Dando uso de las propiedades tenemos:

$$E = 2 \cdot \log_2 2 - 3 \cdot \log_3 3 + 49^{\frac{1}{2}}$$

$$E = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + \sqrt{49}$$

$$E = 2 - 3 + 7 = -1 + 7$$

$$\therefore E = 6$$

Ejercicio 29

Calcular «x» en:

$$\text{antilog}_x \text{antilog}_x 3 = 3$$

Resolución:

De acuerdo con la definición de antilogaritmo, la igualdad mostrada es:

$$\text{antilog}_x (x^3) = 3$$

$$x^{(x^3)} = 3$$

$$x^{x^3} = 3$$

Por artificio: $x^{x^3} = \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^3}$

$$\therefore x = \sqrt[3]{3}$$

7. ECUACIONES E INECUACIONES LOGARÍTMICAS

7.1 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

7.1A) 1ra Forma:

Si $\log_b x = a$

Se debe cumplir que:

$x > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$ ....(S_1)

Luego se debe resolver:

$b^a = x$ ....(S_2)

Siendo la solución final: $(S_1) \cap (S_2)$



7.1B) 2da Forma:

Si $\log_b x = \log_b y$

Se debe cumplir que:

$x > 0 \wedge y > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1 \quad ....(S_1)$

Luego se debe resolver:

$x = y \quad ....(S_2)$

Siendo la solución final: $(S_1) \cap (S_2)$

Ejercicio 30

Resolver:

$$\log_{(x+1)}(19 - x^2) = 2$$

Resolución:

De acuerdo con la teoría se plantea:

$S_1 : 19 - x^2 > 0 \ \wedge \ x + 1 > 0 \ \wedge \ x \neq 1$

$x^2 - 19 < 0 \ \wedge \ x > -1 \ \wedge \ x \neq 1$

$-\sqrt{19} < x < \sqrt{19} \ \wedge \ x > -1 \ \wedge \ x \neq 1$

De donde: $S_1 = \langle -1; \sqrt{19} \rangle - \{1\}$

$S_2 : (x+1)^2 = 19 - x^2 \leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 19 - x^2$

$$2x^2 + 2x - 18 = 0$$

$$x^2 + x - 9 = 0$$

Por la forma de Carnot:

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{37}}{2} \ ; \ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$$

De esto último podemos notar que sólo x_2 se encuentra en el intervalo $\langle -1; \sqrt{19} \rangle - \{1\}$, luego la solución de la ecuación propuesta es $x = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$.

$$\therefore \ CS = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} \right\}$$

Ejercicio 31

Resolver:

$$\log(2x - 1) - \log(x + 1) = 0$$

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$\log(2x - 1) = \log(x + 1)$$

Se debe cumplir que: $2x - 1 > 0 \wedge x + 1 > 0$

$$x > \frac{1}{2} \wedge x > -1$$

De la intersección: $x > \frac{1}{2} \quad ....(I)$

Ahora resolvemos: $2x - 1 = x + 1$

$x = 2 \quad ....(II)$

Como x = 2 se encuentra en el intervalo de (I), afirmamos que x = 2 es la solución de la ecuación.

$$\therefore \ CS = \{2\}$$

Ejercicio 32

Calcular aproximadamente el valor de «x» en: $5^x = 6$

Resolución:

Amigo lector aquí fácilmente podras notar que no estas frente a ninguna forma citada anteriormente, pero de seguro estas pensando en tomar logaritmos pues de este modo podrás tener a la incógnita como base.

Veamos:

$$5^x = 6 \leftrightarrow \log 5^x = \log 6$$

$$x.\log 5 = \log 6 \leftrightarrow x = \frac{\log 6}{\log 5}$$

Ahora tenemos:

$$x = \frac{\log(3.2)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log 3 + \log 2}{\log 10 - \log 2}$$

Por tablas logarítmicas:

$$x = \frac{0,4771 + 0,3010}{1 - 0,3010}$$

$$x = \frac{0,7781}{0,6990} = \frac{7781}{6990}$$

$$\therefore\ x = 1,1131$$

Observación:
La solución encontrada para la ecuación es una aproximación a su valor real, pues los logaritmos utilizados también fueron aproximados.

7.2 INECUACIONES LOGARÍTMICAS

7.2A) 1er Caso:

$$0 < b < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$$

* $\log_b x > \log_b y \rightarrow x < y$
* $\log_b x \geq \log_b y \rightarrow x \leq y$
* $\log_b x < \log_b y \rightarrow x > y$
* $\log_b x \leq \log_b y \rightarrow x \geq y$

7.2B) 2º Caso:

$$b > 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$$

* $\log_b x > \log_b y \rightarrow x > y$
* $\log_b x \geq \log_b y \rightarrow x \geq y$
* $\log_b x < \log_b y \rightarrow x < y$
* $\log_b x \leq \log_b y \rightarrow x \leq y$

Ejercicio 33

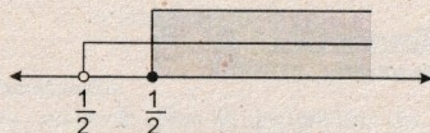
Resolver:

$$\log_{0,5}(2x+1) \leq \log_{0,5} 2$$

Resolución:
De acuerdo con el 1er caso procedemos de la manera siguiente

$$2x+1 > 0 \ \wedge \ 2x+1 \geq 2$$

$$x > -\frac{1}{2} \ \wedge \ x \geq \frac{1}{2}$$



$$\therefore\ CS = \left[\frac{1}{2};\infty\right\rangle$$

Ejercicio 34

Resolver:

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x) > 2$$

Resolución:
La inecuación dada es:

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x) > \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^2$$

$$\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x) > \log_{\sqrt{3}} 3$$

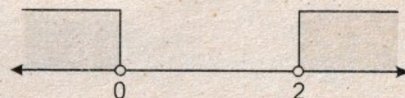
Ahora de acuerdo con el 2do caso procedemos de la manera siguiente:

$$x^2 - 2x > 0 \ \wedge \ x^2 - 2x > 3$$

$$x^2 - 2x > 0 \ \wedge \ x^2 - 2x - 3 > 0$$

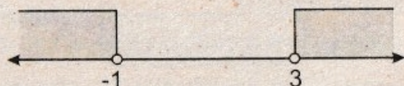
$$x(x-2) > 0 \ \wedge \ (x-3)(x+1) > 0$$

En la recta real $x\ (x-2) > 0$

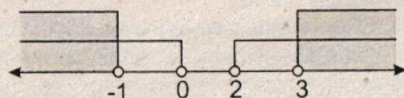




En la recta real $(x-3)(x+1)>0$



Intersectando tenemos:



$$\therefore\ CS=\langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 3;\infty\rangle$$

8. REGLAS ADICIONALES

8.1 LOGARITMOS COMO PROGRESIONES

Consideremos dos progresiones, una geométrica y otra aritmética, como se muestran:

$$\div\div \ldots : q^{-n} : \ldots : q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots$$

$$\div\ \ldots \bullet -nr \bullet \ldots \bullet -3r \bullet -2r \bullet -r \bullet 0 \bullet r \bullet 2r \bullet 3r \bullet \ldots \bullet nr \bullet \ldots$$

La primera de razón $q>0$ y la segunda de razón conmensurable r de tal manera que se corresponden entre sí.

1	;	0
q	;	r
q^{-1}	;	$-r$
q^2	;	$2r$
q^{-2}	;	$-2r$
⋮		⋮
q^n	;	nr
q^{-n}	;	$-nr$
⋮		⋮

Ahora podemos definir logaritmo de un término de la progresión geométrica como su término correspondiente en la progresión aritmética. Veamos

$$\log_b 1 = 0$$
$$\log_b q = r$$
$$\log_b q^{-1} = -r$$
$$\log_b q^2 = 2r$$
$$\log_b q^{-2} = -2r$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\log_b q^n = nr$$
$$\log_b q^{-n} = -nr$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

En forma general:

$$\log_b q^n = nr$$
$$b^{nr} = q^n$$
$$b^r = q$$
$$\therefore\ b = \sqrt[r]{q}$$

Donde:
r = razón de la progresión aritmética
q = razón de la progresión geométrica

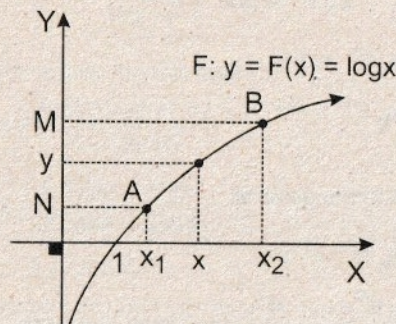
8.1A) Propiedad

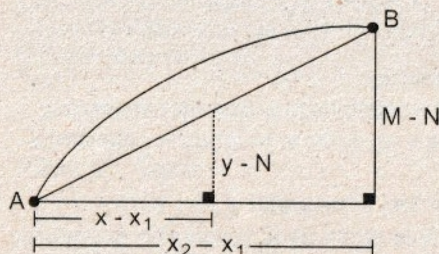
Si la razón de la progresión geométrica es mayor que uno y la razón de la progresión aritmética es positiva, entonces las dos progresiones son crecientes en el mismo sentido.

Observación:
Para calcular el logaritmo de un número comprendido entre «q^n» y «q^{n+1}» podemos interpolar tantas veces como sea necesario hasta determinar el número de la progresión geométrica y en consecuencia encontrar su logaritmo correspondiente en la progresión aritmética.

8.2 INTERPOLACIÓN LINEAL

Dados: $\log x_1 = N$ y $\log x_2 = M$; si se pretende calcular Log x de modo que $x_1 < x < x_2$, entonces podemos calcular el valor aproximado de log x utilizando para esto una recta como aproximación de la curva logarítmica.





Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y-N}{x-x_1} = \frac{M-N}{x_2-x_1}$$

$$\therefore\ y = (x-x_1)\left(\frac{M-N}{x_2-x_1}\right) + N$$

8.3 LOGARITMO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea: $Z = x + yi / x, y \in \mathbb{R}$

$i = \sqrt{-1} \wedge \text{Arg}(z) = \theta$,

Entonces su logaritmo se calcula según la relación:

$$\text{Ln } z = \text{Ln}|z| + \theta i$$

8.4 LOGARITMO DE NÚMEROS NEGATIVOS

El logaritmo para números negativos no existe en el campo de los números reales, sin embargo si existen en el campo de los números complejos y se puede calcular según la siguiente relación:

$$\log(-x) = \log x + 1{,}36439i\ ;\ x > 0$$

Ejercicio 35

Calcular:

$$E = \log(-4)$$

Resolución:

Por fórmula:

$$\log(-4) = \log 4 + 1{,}36439i$$

$$\log(-4) = 2\log 2 + 1{,}36439\,i$$

$$\log(-4) = 2(0{,}3010) + 1{,}36439\,i$$

$$\therefore\ \log(-4) = 0{,}6020 + 1{,}36439\,i$$

Ejercicio 36

Calcular el logarítmo neperiano del siguiente número complejo z = 2i.

Resolución:

Observa que: $|z| = 2 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$

Por fórmula $\text{Ln } z = \text{Ln}|z| + \theta\, i$

$$\therefore\ \text{Ln}(2i) = \text{Ln}(2) + \frac{\pi}{2}i$$

Ejercicio 37

Determine la base del sistema de logarítmos definido por las sucesiones:

$$\ldots : \frac{1}{81} : \frac{1}{9} : 1 : 9 : 81 : \ldots$$

$$\ldots \bullet -8 \bullet -4 \bullet 0 \bullet 4 \bullet 8 \ \ldots$$



Resolución:
De acuerdo con la teoría si b es la base buscada, ésta se obtiene así: $b = \sqrt[r]{q}$
Donde:
r = razón de la progresión aritmética = 4
q = azón de la progresión geométrica = 9

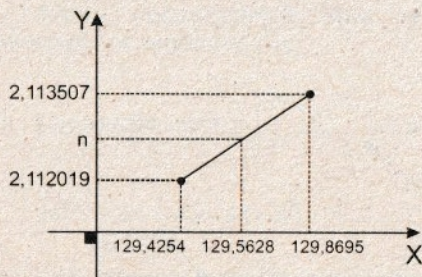
Finalmente: $b = \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{(3)^2}$

$$\therefore\ b = \sqrt{3}$$

Ejercicio 38

Considerando que:
log 129,8695 = 2,113507 y
log 129,4254 = 2,112019
Determine el valor de log 129,5628

Resolución:
De acuerdo con la teoria podemos construir la siguiente gráfica:



Ahora podemos plantear que:

$$\frac{n-2{,}112019}{2{,}113507-2{,}112019} = \frac{0{,}5628-0{,}4254}{0{,}8695-0{,}4254}$$

$$\frac{n-2{,}112019}{0{,}001488} = \frac{0{,}1374}{0{,}4441}$$

$$\frac{n-2{,}112019}{1{,}488\cdot 10^{-3}} = 0{,}309389$$

$$n-2{,}112019 = (1{,}488\cdot 10^{-3})\cdot(3{,}09389\cdot 10^{-1})$$

$$n-2{,}112019 = 4{,}6037083\cdot 10^{-4}$$

$$n = 4{,}6037083\cdot 10^{-4} + 2{,}112019$$

$$n = 4{,}6037083\cdot 10^{-4} + 21120{,}19\cdot 10^{-4}$$

$$n = (4{,}6037083 + 21120{,}19)\cdot 10^{-4}$$

$$n = 21124{,}794\cdot 10^{-4}$$

Finalmente tenemos:

$$n = 2{,}1124794$$

$$\therefore\ \log 129{,}5628 = 2{,}1124794$$

Ejercicio 39

Resolver la siguiente ecuación:

$$\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(x^2-4x+3) \geq 0$$

A) $\left[2-\sqrt{2};1\right\rangle \cup \left\langle 3;2+\sqrt{2}\right]$

B) $\left[-2+\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\right]$

C) $\left[0\,;2+\sqrt{2}\right]$

D) $\left[2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}\right]$

E) $[-2\,;2]$

Resolución:
La inecuación dada es:

$$\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(x^2-4x+3) \geq \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}1$$

Ahora se cumple que:

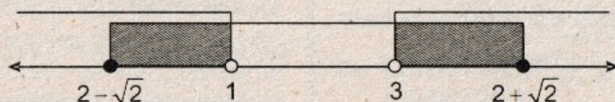
$$x^2-4x+3>0 \ \wedge\ x^2-4x+3 \leq 1$$

$$x^2-4x+3>0 \ \wedge\ x^2-4x+2 \leq 0$$

$$(x-3)(x-1)>0 \wedge\ (x-2)^2-2 \leq 0$$

$$(x-3)(x-1)>0 \wedge\ (x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2}) \leq 0$$

Finalmente en la recta real:



$$\therefore\ CS=\left[2-\sqrt{2}\,;1\right\rangle\cup\left\langle 3\,;2+\sqrt{2}\right]$$

***Clave:* A**

Ejercicio 40

Se da la siguiente función: $y=F(x)=2^{Sen(x)}$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El conjunto $A=\{T\in\mathbb{R}\,/\,F(x+T)=F(x)\,;\ \forall x\in\mathbb{R}\}$ es no vacío.

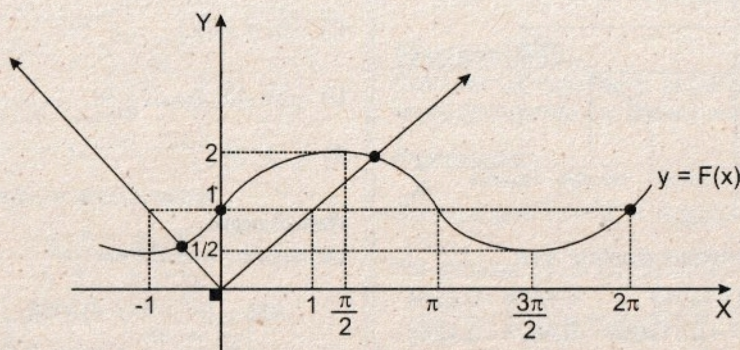
II. El conjunto $B=\{x\in\mathbb{R}\,/\,F(x)=|x|\}$ tiene dos elementos

III. El menor valor que asume F(x) es cero.

A) VFF B) VVF C) FFF D) FVV E) FVF

Resolución:

Esbozando una gráfica tenemos:



Analizando cada proposición:

I. $2\pi\in A$, luego F(x + T) = F(x) ....(V)

II. $B=\{x_1\,;x_2\}$, existen 2 punto de corte ....(V)

III. F(x) mínimo = $\frac{1}{2}$, ocurre cuando $x=\frac{3\pi}{2}$ ....(F)

***Clave:* B**

Ejercicio 41

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\pi^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\text{Ln}\pi}$

II. La ecuación $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x)} = x$, no tiene solución.

III. $\text{Log}(2x^2 - 18) - \text{Log}(x-3) - \text{Log}(x+3) = \text{Log}2 \;, \forall x \in \mathbb{R}$

A) VVV B) FFF C) VVF
D) VFF E) FVF

Resolución:

I. Observa que:

$$e^{\sqrt{2}\text{Ln}\pi} = e^{\text{Ln}\pi^{\sqrt{2}}} = \pi^{\sqrt{2}}$$

Ahora reconocemos que la afirmación es verdadera (V)

II. La ecuación dada: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)^{-1}} = x$

$$(x)^{-1} = x \,;\, \frac{1}{x} = x \rightarrow 1 = x^2$$

De aquí notamos que $x = 1 \vee x = -1$, pero sólo aceptamos x = 1, con lo cual la afirmación es falsa (F).

III. Inicialmente debemos hacer cumplir que:

$$2x^2 - 18 > 0 \wedge x - 3 > 0 \wedge x + 3 > 0$$
$$(x+3)(x-3) > 0 \wedge x - 3 > 0 \wedge x + 3 > 0$$

En la intersección: x > 3, lo cual demuestra que la afirmación es falsa (F)

***Clave:* D**

Ejercicio 42

Si la función $F(x) = 2^{ax+1}$ verifica $x_1 < x_2$ de modo que $F(x_1) > F(x_2)$.

¿Qué podemos afirmar de a?

A) $a > 1$ B) $a < 0$
C) $-1 < a < 1$ D) $a \geq 0$
E) No existe tal número

Resolución:

Observa que:

$$F(x_1) = 2^{ax_1+1} \text{ y } F(x_2) = 2^{ax_2+1}$$

Ahora se plantea: $F(x_1) > F(x_2)$

$$2^{ax_1+1} > 2^{ax_2+1}$$

Aqui se cumple: $ax_1 + 1 > ax_2 + 1$

$$ax_1 - ax_2 > 0$$
$$a(x_1 - x_2) > 0$$

Por condición: $x_1 < x_2$: $a\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\text{Negativo}} > 0$

$$\therefore \; a < 0$$

***Clave:* B**

Ejercicio 43

La población de cierto tipo de bacteria esta dada por la función $P(T) = 100e^{-T} + 200$, donde T representa el número de segundos, P(T) expresa millones de bacterias.

I. En qué momento la población es máxima
II. Determine, aproximadamente, la población final.

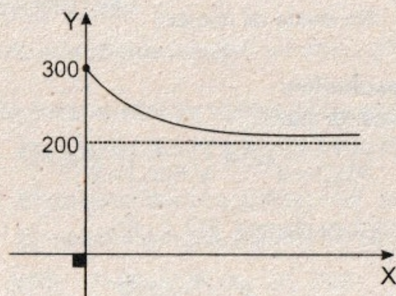
A) $0;100.10^6$ B) $0;200.10^6$

C) $1;200.10^6$ D) $0;300.10^6$

E) $2;200.10^6$

Resolución:

Esbozando una gráfica de la función P(T) tenemos:



I. Cuando T = 0

II. Hagamos que $T \to \infty$, luego

$P(T) = 200.10^6$

Clave: B

Ejercicio 44

Considerando que log 2 = 0,301030 y log 7 = 0,845100

Determine el número de cifras de la potencia 875^{16}.

A) 42 B) 45 C) 47

D) 48 E) 49

Resolución:

Sea N la potencia, es decir: $N = 875^{16}$

De acuerdo con la teoría tenemos:

$\log N = \log 875^{16}$

$\log N = 16 \cdot \log 875$

$\log N = 16 \cdot \log(7.5^3)$

$\log N = 16(\log 7 + \log 5^3)$

$\log N = 16(\log 7 + 3\log 5)$ ....(1)

Fácilmente podemos reconocer que:

$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right)$

$\log 5 = \log 10 - \log 2$

$\log 5 = 1 - \log 2$ ....(2)

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$\log N = 16(\log 7 - 3\log 2 + 3)$

$\log N = 16(0{,}845100 - 0{,}903090 + 3)$

$\log N = 16(2{,}94201)$

$\log N = 47{,}07216$

Fácilmente podemos reconocer que:

Característica = 47

$\therefore$ Nº de cifras de N = 48

Clave: D

Ejercicio 45

Dada la función:

$$F(x) = \log_{(a^2)}(x^2)\ ;\ a < -1$$

Determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. $F(x) = \text{Log}_{(-a)}x$

II. $F(b^2) = 1\ ;\ b = \pm\sqrt{-a}$

III. F es univalente

A) VVF B) FVF C) VFF

D) FVF E) FVV

E&M



Resolución:

I. $F(x)=\log_{(a^2)}(x^2)$

$F(x)=\log_{(\sqrt{a^2})}(\sqrt{x^2})$

$F(x)=\log_{|a|}|x|$

Como $a<-1$; $F(x)=\log_{(-a)}|x|$, luego notamos que la proposición es falsa (F)

II. Por lo anterior:

$F(x)=\log_{(-a)}|x|$

$F(b^2)=\log_{(-a)}|b^2|$

$1=\log_{(-a)}b^2$

Según la definición: $b^2=-a$, de donde $b=\pm\sqrt{-a}$, luego ésta proposición es verdadera (V).

III. Como $F(x)=\log_{(-a)}|x|, a<-1$

Notamos que la función no es univalente, luego la proposición es falsa (F).

***Clave:* D**

Ejercicio 46

Si S es el conjunto solución de:

$$\frac{\left[\log(10^x+10)\right]\left(2^{x^2-x}-2^6\right)}{e^{2x}+e^x+1}\geq 0$$

Entonces:

A) $S\subset[-2;\infty\rangle$

B) $S\subset\langle-\infty;3\rangle$

C) $S\subset\langle-\infty;-2]\cup[3;\infty\rangle$

D) $S\subset\langle-\infty;-2]\cup[3;10]$

E) $S\subset[-10;\infty\rangle$

Resolución:

Una rápida inspección permite reconocer que:

$\log(10^x+10)>1\ \forall x\in\mathbb{R}$, así mismo

$e^{2x}+e^x+1>0\ \forall\in\mathbb{R}$

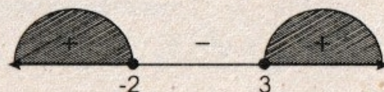
Ahora la inecuación propuesta se reduce a:

$$2^{x^2-x}-2^6\geq 0\leftrightarrow 2^{x^2-x}\geq 2^6$$

$$x^2-x\geq 6\leftrightarrow x^2-x-6\geq 0$$

$$(x-3)(x+2)\geq 0$$

Finalmente en la recta real se tendrá:



$$\therefore\ S=\langle-\infty;-2]\cup[3;\infty\rangle$$

***Clave:* C**

Ejercicio 47

Dada la función:

$$F:A\to[-1;\infty\rangle/F(x)=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Determine A, de modo que F sea sobreyectiva.

A) $\langle 1;\infty\rangle$ B) $[e^{-4};1\rangle$ C) $[e;\infty\rangle$

D) $\langle e^{-2};1]$ E) $[e^{-2};1\rangle$

Resolución:

De acuerdo con la teoría se cumple que:

$F(x)\in[-1;\infty\rangle$, razón por la cual se plantea

$F(x) \geq -1$, es decir:

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq -1$$

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 2$$

Esta última inecuación es equivalente a:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \wedge \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$$

La cual se puede reescribir de la forma siguiente:

$$0 < \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$$

$$\ln(1) < \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \ln\left(e^2\right)$$

$$1 < \frac{1}{x} \leq e^2$$

$$\frac{1}{e^2} \leq x < 1$$

$$e^{-2} \leq x < 1 \Leftrightarrow x \in \left[e^{-2} ; 1\right\rangle$$

Como $x \in A$, decimos que $A = \left[e^{-2} ; 1\right\rangle$

***Clave:* E**

Ejercicio 48

Resolver:

$$\begin{cases} 2^x < 3 - x & \text{....(1)} \\ \dfrac{1}{\log(2x+1)} > 0 & \text{....(2)} \end{cases}$$

A) $\left[0 ; 1\right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{1}{2};1\right\rangle$ C) $\langle 0;1\rangle$

D) $\langle 1;\infty\rangle$ E) $\left\langle -\frac{1}{2};\infty\right\rangle$

Resolución:

Resolviendo la inecuación (1) de un modo similar que el ejercicio 14 concluimos que :

$$x < 1$$

De la segunda inecuación:

$$\log(2x+1) > 0$$

$$\log(2x+1) > \log(1)$$

De acuerdo con la teoría:

$$\underbrace{2x+1>0 \ \wedge \ 2x+1>1}_{2x+1>1}$$

$$2x > 0$$

$$x > 0$$

Finalmente notamos que: $0 < x < 1$

$$\therefore \ CS = \langle 0 ; 1\rangle$$

***Clave:* C**

Ejercicio 49

Si $\{(x_0 ; y_0)\}$ es el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2^x = 2^y + 28 & \text{....(1)} \\ x + y = \text{Log}_2 128 & \text{....(2)} \end{cases}$$

Entonces el valor de $3x_0 - 2y_0$ es:

A) -4 B) 1 C) 6

D) 11 E) 16

Resolución:

De la ecuación (2) : $x + y = \text{Log}_2 2^7$

$x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x$ ....(3)

Reemplazando (3) en (1):

$$2^x = 2^{7-x} + 28$$

Multiplicando por 2^x:

$$(2^x)^2 = 2^7 + 28(2^x)$$

$$(2^x)^2 - 28(2^x) - 128 = 0$$

$$\begin{matrix} 2^x & & -32 \\ 2^x & & 4 \end{matrix}$$

$$(2^x - 32)(2^x + 4) = 0$$

Como $2^x + 4 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$2^x = 32 \Rightarrow x_0 = 5$$

Reemplazando en (3):

$$y = 7 - 5 \Rightarrow y_0 = 2$$

Finalmente tenemos:

$$3x_0 - 2y_0 = 3(5) - 2(2)$$

$$x_0 - 2y_0 = 15 - 4$$

$$\therefore 3x_0 - 2y_0 = 11$$

***Clave:* D**

Ejercicio 50

Si: $\{\{x_0 ; y_0\}\}$ es el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\log_x(11)}{\log_{xy}(11)} = 5 - \log_x(y) & ....(1) \\ x^2 + y = 8 & ....(2) \end{cases}$$

Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

I. $\log_{(x_0)}(y_0) \in \langle 1;3 \rangle$

II. x_0 Es una raíz de $x^2 - 7x + 12 = 0$

III. $2x_0 - y_0 > 1$

A) VFF B) FFF C) VFV
D) FFV E) VVF

Resolución:

Expresando cada logarítmo del primer miembro de (1) en función de la base 11, tenemos:

$$\frac{\log_{11}(xy)}{\log_{11}x} = 5 - \log_x(y)$$

Ahora según el cambio de base:

$$\log_x(xy) = 5 - \log_x(y)$$

$$\log_x(xy) + \log_x(y) = 5$$

$$\log_x(xy \cdot y) = 5$$

$$\log_x(xy^2) = 5$$

Según la definición:

$$x^5 = xy^2 \Rightarrow x^4 = y^2$$

$$x^2 = y \qquad ....(3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

Con lo cual tenemos: $x = 2$

Finalmente analicemos cada una de las expresiones dadas:

I. $\log_{(x_0)}(y_0) = \log_{(2)}(4) = 2$

Esta proposición es verdadera (V)

II. Las raíces de $x^2 - 7x + 12 = 0$ son 4 y 3

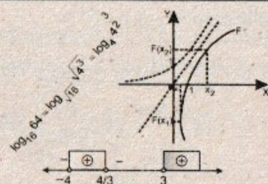
Esta proposición es falsa (F)

III. $2x_0 - y_0 = 2(2) - 4 = 4 - 4 = 0$

Esta proposición es falsa (F)

***Clave:* A**

Problemas Resueltos



Problema 01

Decir la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

I. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}} > 1$

II. $(0,21)^{-\pi} < 1$

III. $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}} < 1$

A) VFV B) VVV C) VFF
D) FVV E) FFV

Resolución:

En cada afirmación

I. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$

Por teorema: $-\frac{6}{7} < 0$ ....Verdadero (V)

II. $(0,21)^{-\pi} < 1 \Leftrightarrow (0,21)^{-\pi} < (0,21)^{0}$

Por teorema: $-\pi > 0$ .... Falso (F)

III. $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}} < -1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}} < \sqrt{3}^{0}$

Por teorema: $-\frac{1}{2} < 0$ ....Verdadero (V)

$\therefore$ La combinación correcta es: VFV

Clave: A

Problema 02

Se define el siguiente conjunto:

$G = \{a \in \mathbb{R} / a^{\frac{3}{5}} > a^{\frac{5}{3}}\}$, entonces se puede afirmar:

A) $G \subset [-1;0\rangle$ B) $G \subset \langle 0;1\rangle$

C) $G \cap [1;\infty\rangle \neq \phi$ D) $\mathbb{Z} \cap G \neq \phi$

E) G es un conjunto unitario

Resolución:

Se tiene: $a^{\frac{3}{5}} > a^{\frac{5}{3}}$

Observa que: $0 < a < 1$, pues $\frac{3}{5} < \frac{5}{3}$

$\Rightarrow G = \langle 0;1\rangle$

Clave: B

Problema 03

Dada la función $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, hallar el rango de f.

A) $[0;1\rangle$ B) $\langle -1;0]$ C) $\langle -1;1\rangle$

D) $[0;e\rangle$ E) $\langle -e;e\rangle$

Resolución:

La función es: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$



Se sabe que: $e^x > 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$

$$0 < e^x < \infty$$

$$1 < e^x + 1 < \infty$$

$$0 < \frac{1}{e^x + 1} < 1$$

$$-2 < -\frac{2}{e^x + 1} < 0$$

$$-1 < 1 - \frac{2}{e^x + 1} < 1$$

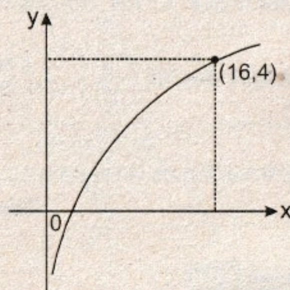
$$-1 < f(x) < 1$$

$\Rightarrow \; Ran(f) = \langle -1 ; 1 \rangle$

***Clave:* C**

Problema 04

Si la siguiente gráfica corresponde a una función logarítmica $f(x) = Log_b x$.
Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:



I. La base pertenece al intervalo (0 ; 1).
II. La función inversa de esta función es $y = 2^x$.
III. La gráfica de esta función se intersecta con la gráfica de $y = x^2$ en el punto (4;2)

A) VVV B) FVF C) VVF
D) FVV E) FFV

Resolución:

Se tiene: $f(x) = Log_b x$

Como: $(16;4) \in f : 4 = Log_b 16$

$$b = 2$$

I. La base $b = 2 > 1$
La proposición es falsa ....(F)

II. $y = Log_b x = log_2 x$, su función inversa es $y = 2^x$.
La proposición es verdadera .....(V)

III. $\left.\begin{matrix} y = Log_2 x \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} x^2 = Log_2 x \Rightarrow 2^{x^2} = x$

Fácilmente notamos que si x = 4, no se verifica la ecuación. La proposición es falsa ....(F)

$\therefore$ La combinación correcta es: FVF

***Clave:* B**

Problema 05

La regla de correspondencia de una función f es:

$$f(x) = \frac{2^x + 1}{\sqrt{2^x - 8^x}}$$

Determinar el mayor dominio de f.

A) $\langle -\infty ; 1 \rangle$ B) $\langle -\infty ; 0 \rangle$ C) $\langle 0 ; +\infty \rangle$
D) $\langle 1 ; +\infty \rangle$ E) $\langle -1 ; 1 \rangle$

Resolución:

La función es $f(x) = \dfrac{2^x + 1}{\sqrt{2^x - 8^x}}$

Se plantea: $2^x - 8^x > 0$

$$2^x > 8^x$$

$$2^x > 2^{3x}$$

Por teorema: $x > 3x \Leftrightarrow -2x > 0$

$$x < 0$$

Finalmente tenemos: $Dom(f) = \langle -\infty ; 0 \rangle$

***Clave:* B**

Problema 06

Se dan las siguientes afirmaciones:

I. El rango de la función $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ es $\langle 0;1]$.

II. El rango de la función $g(x)=7^{|x|}$ es $[1;+\infty\rangle$.

III. El rango de la función $h(x)=\left(\frac{9}{10}\right)^{x^2}$ es $\langle 0;1]$.

¿Cuáles de estas afirmaciones son las correctas?

A) Solo I B) Solo II
C) Solo III D) Solo I y II
E) I, II y III

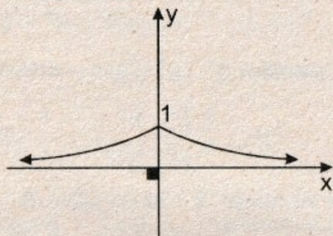
Resolución:

En cada afirmación tenemos:

I. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

Graficando:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} & ; x\geq 0\\ 2^{x} & ; x<0\end{cases}$$



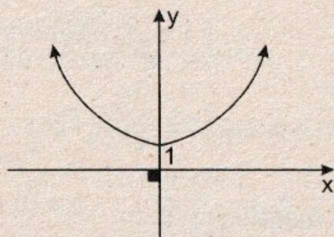
$\Rightarrow$ $\text{Ran}(f)=\langle 0\,;1]$

La afirmación es verdadera ....(V)

II. $g(x)=7^{|x|}$

Graficando:

$$g(x)=7^{|x|}=\begin{cases}7^{x} & ; x\geq 0\\ \left(\frac{1}{7}\right)^{x} & ; x<0\end{cases}$$



$\Rightarrow$ $\text{Ran}(g)=[1\,;\infty\rangle$

La afirmación es verdadera ....(V)

III. $h(x)=\left(\frac{9}{10}\right)^{x^2}$; $h(x)>0$

Se sabe que $x^2\geq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Reacomodando: $\left(\frac{9}{10}\right)^{x^2}\leq\left(\frac{9}{10}\right)^{0}$

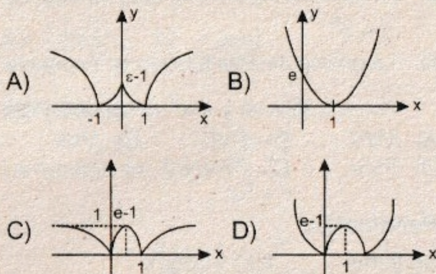
$$0<h(x)\leq 1$$

La afirmación es verdadera ....(V)

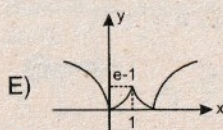
Clave: E

Problema 07

El gráfico de $f(x)=|\,e-e^{|1-x|}\,|$ es:



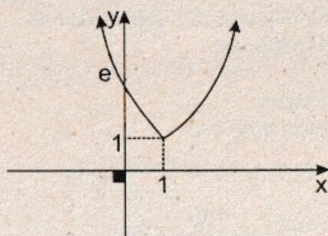


E) 

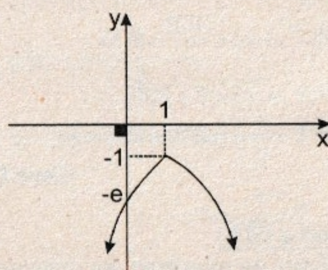
Resolución:

Se pide graficar $f(x)=\left|e-e^{|1-x|}\right|$

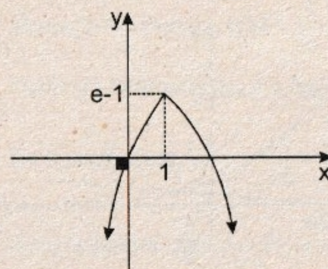
I. $y=e^{|1-x|}=\begin{cases} e^{1-x} & ; x\le 1 \\ e^{x-1} & ; x>1 \end{cases}$



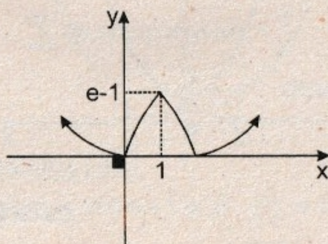
II. $y=-e^{|1-x|}$



III. $y=e-e^{|1-x|}$



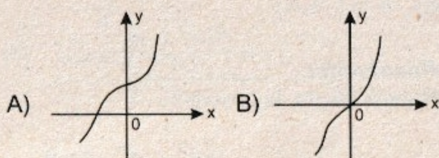
IV. $y=|e-e^{|1-x|}|$

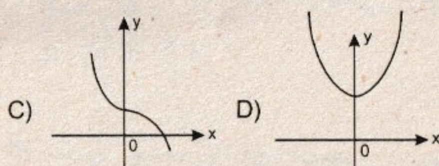


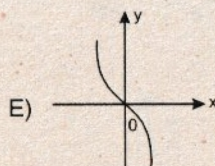
***Clave:* D**

Problema 08

Sea la función $f(x)=3^{x-2}+3^{-x-2}$ entonces la figura que mejor representa la gráfica de f es:

A) B) 

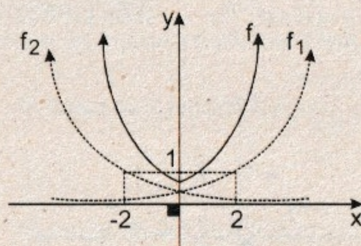
C) D) 

E) 

Resolución:

$f(x)=\underbrace{3^{x-2}}_{f_1}+\underbrace{3^{-x-2}}_{f_2}\ ;\ x\in\mathbb{R}$





Clave: D

Problema 09

El rango de la función $f(x)=e^{\operatorname{sgn}(e^x-1)}$, $x\in\mathbb{R}$ es A, entonces podemos afirmar que:

A) $A^C\subset\langle 1;\infty\rangle$ B) $A\cap\langle -\infty;1\rangle\neq 0$

C) $[-1;10\rangle\subset A$ D) $A\subset\langle 0{,}99;\infty\rangle$

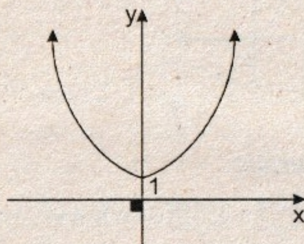
E) $A\supset\langle -1;\infty\rangle$

Resolución:

Redefiniendo la función:

$$f(x)=e^{(\operatorname{sgn}(e^x-1)x)}=\begin{cases}e^x & ;\ e^x-1>0\\ 1 & ;\ e^x-1=0\\ e^{-x} & ;\ e^x-1<0\end{cases}$$

$$f(x)=e^{(\operatorname{sgn}(e^x-1)x)}=\begin{cases}e^x & ;\ x>0\\ 1 & ;\ x=0\\ e^{-x} & ;\ x<0\end{cases}$$



Observa que: $\operatorname{Ran}(f)=A=[1;\infty\rangle$

Clave: D

Problema 10

La población de cierto tipo de bacterias está representado por la siguiente función:

$$P(T)=100e^{-|T-2|}+200\ ;\ T\geq 0$$

Donde T representa el número de segundo y P(x) expresa millones de bacterias en el instante T.

¿En el futuro, cuál es el valor de la población?

A) 100 millones B) 180 millones
C) 200 millones D) 240 millones
E) 300 millones

Resolución:

La función dato es:

$$P(T)=100e^{-|T-2|}+200\ ;\ T\geq 0$$

$$P(T)=\frac{100}{e^{|T-2|}}+200$$

Cuando $T\to\infty$ (En el futuro)

$$P(T\to\infty)=\frac{100}{\infty}+200$$

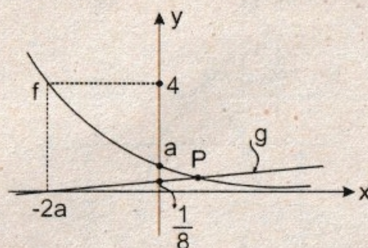
$$P(T\to\infty)=0+200$$

$$P(T\to\infty)=200\text{ millones}$$

Clave: C

Problema 11

En la figura se muestran las gráficas de una función exponencial $f(x)=b^x$ y una función afín g.





Determinar la suma de coordenadas del punto P.

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{7}{4}$

D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

Resolución:

En cada función:

* $f(x) = b^x$

$f(0) = a \Rightarrow b^0 = a$

$\Rightarrow 1 = a$

$f(-2a) = 4 \Rightarrow b^{-2a} = 4$

$\Rightarrow b^{-2} = 4$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Ahora la función es: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

* $g(x) = mx + \frac{1}{8}$

$g(-2a) = 0 \Rightarrow m(-2a) + \frac{1}{8} = 0$

$-2m + \frac{1}{8} = 0$

$m = \frac{1}{16}$

Ahora la función es $g(x) = \frac{1}{16}x + \frac{1}{8}$

Punto de intersección: $y = f(x) = g(x)$

Se cumple que: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}x + \frac{1}{8}$

Aquí notamos que: $x = 2 \wedge y = \frac{1}{4}$

Ahora tenemos que: $P = \left(2; \frac{1}{4}\right)$

$\therefore \sum$ de componentes $= \frac{9}{4}$

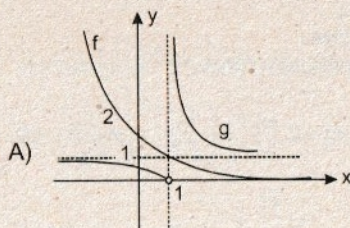
Clave: D

Problema 12

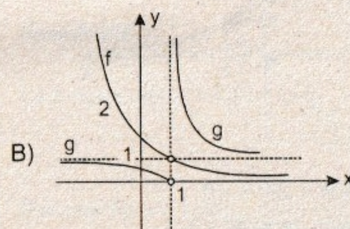
Sean las funciones f; g: $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 2^{-x+1}$; $g(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

¿Cuál de la figuras representa mejor las gráficas de f y g?

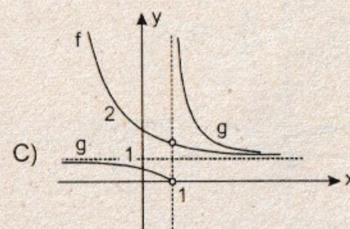
A)

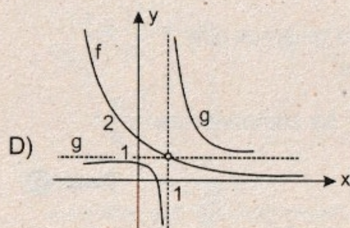


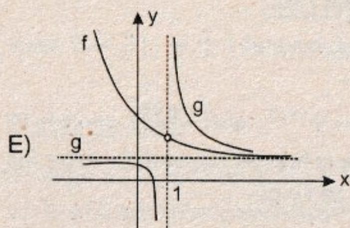
B)



C)

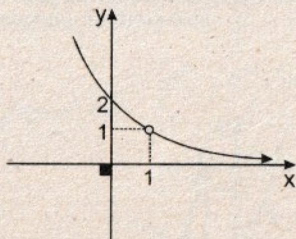


D)


E)


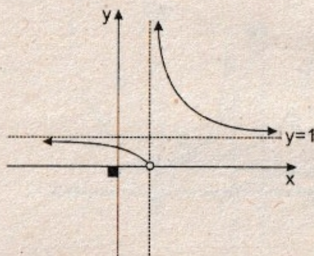
Resolución:
Graficando cada función:

I. $y = f(x) = 2^{-x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

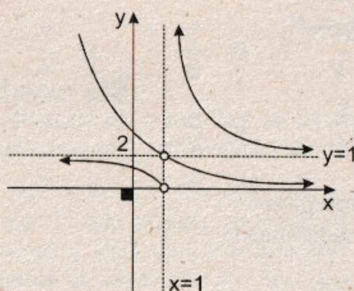


II. $y = g(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} > 0$

* Asintota vertical: x = 1
* Asintota horizontal: y = 1



Finalmente en un mismo plano cartesiano:



Clave: B

Problema 13

El conjunto

$H = \{x \in \mathbb{R} / Log_x(1/3) < 0\}$ es igual con

A) $\langle 0;1 \rangle$ B) $\langle 1;+\infty \rangle$ C) $\langle 0;+\infty \rangle$

D) $\left\langle 0;\frac{1}{3} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{3};+\infty \right\rangle$

Resolución:

En la inecuación: $Log_x\left(\frac{1}{3}\right) < 0$

$$Log_x\left(\frac{1}{3}\right) < Log_x 1$$

Observa que: $0 < x < 1 \wedge \frac{1}{3} > 1 \equiv F$

En consecuencia: $x > 1 \wedge \frac{1}{3} < 1$

$$x > 1$$

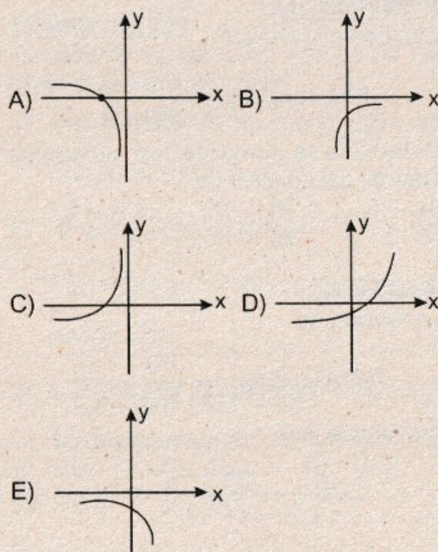
$$\therefore H = \langle 1;\infty \rangle$$

Clave: B

Problema 14

Si a > 1 y $f(x) = -Log_a(-x)$, entonces la gráfica que mejor representa f es:

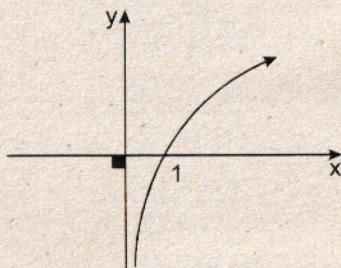




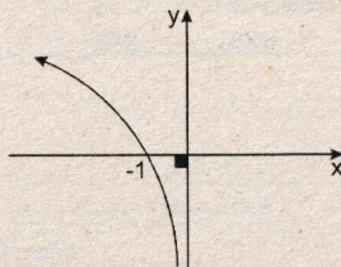
Resolución:

Se tiene: $a > 1 \wedge f(x) = -Log_a(-x)$

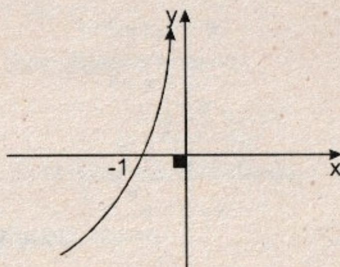
I. $y = Log_a(x)$



II. $y = Log_a(-x)$



III. $y = f(x) = -Log_a(-x)$



Problema 15

Dada la función $f(x) = Log_{\frac{1}{2}}\left[Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ cuyo rango es $\left[-1;+\infty\right\rangle$, hallar el dominio de f.

A) $\left[\frac{1}{e^2};1\right\rangle$ B) $\left[\frac{1}{e};1\right\rangle$ C) $\left[0;1\right\rangle$

D) $\left\langle 1;2\right\rangle$ E) $\left[\frac{1}{e^3};1\right\rangle$

Resolución:

La función es: $y = f(x) = Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left[Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

Por condición: $Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left[Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] \geq -1$

$$Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left[Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] \geq Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}2$$

Por propiedad: $0 < Ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$

$$Ln(1) < Ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq Ln\left(e^2\right)$$

E&M

$$1<\frac{1}{x}\leq e^2$$

$$e^{-2}\leq x<1$$

$$\frac{1}{e^2}\leq x<1$$

$$\therefore\ Dom(f)=\left[\frac{1}{e^2};1\right\rangle$$

Clave: A

Problema 16

Determinar el dominio de la función

$f(x)=Log_6(Log_4(Log_2(9-x^2)))$

A) $\langle -3;3\rangle$ B) $\langle -2;2\rangle$

C) $\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\rangle$ D) $\langle -\sqrt{7};\sqrt{7}\rangle$

E) $\langle -\sqrt{3};\sqrt{3}\rangle$

Resolución:

La función es:

$$f(x)=Log_6(Log_4(Log_2(9-x^2)))$$

Se cumple que:

$$Log_4(Log_2(9-x^2))>0$$

$$Log_4(Log_2(9-x^2))>Log_4 1$$

Por propiedad: $Log_2(9-x^2)>1$

$$Log_2(9-x^2)>Log_2 2$$

$$9-x^2>2$$

$$x^2-7<0$$

$$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})<0$$

En forma equivalente: $-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$

$$\therefore\ Dom(f)=\langle -\sqrt{7};\sqrt{7}\rangle$$

Clave: D

Problema 17

Considere la función:

$$f(x)=Ln\left(Log\frac{10}{(x-1)(x+2)}\right)$$

Determine la suma de los elementos enteros del dominio de f.

A) -5 B) -3 C) -1

D) 2 E) 4

Resolución:

La función es:

$$f(x)=Ln\left\{Log\left[\frac{10}{(x-1)(x+2)}\right]\right\}$$

Se cumple que:

$$Log\left[\frac{10}{(x-1)(x+2)}\right]>0$$

$$Log\left[\frac{10}{(x-1)(x+2)}\right]>Log(1)$$

$$\frac{10}{(x-1)(x+2)}>1$$

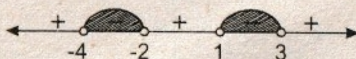
$$\frac{10}{x^2+x-2}-1>0$$

$$\frac{-x^2-x+12}{x^2+x-2}>0$$

$$\frac{x^2+x-12}{x^2+x-2}<0$$

$$\frac{(x+4)(x-3)}{(x+2)(x-1)}<0$$

En la recta real:



$\Rightarrow Dom(f)=\langle -4;-2\rangle\cup\langle 1;3\rangle$

$\sum$ elementos enteros $=-3+2$

$$\therefore \sum \text{elementos enteros}=-1$$

Clave: C



Problema 18

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. La función $f(x) = -\text{Log}_{0.75}x$ es creciente en $\langle 0;+\infty\rangle$

II. Si $a^{-1} \in \langle 2;3\rangle$ entonces $f(x) = \text{Log}_a(x^2-16)$ es decreciente en $\langle 5;+\infty\rangle$

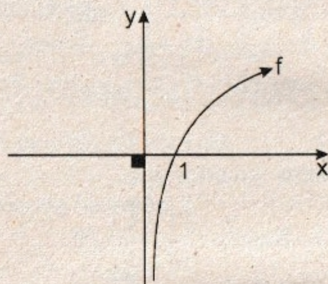
III. La función $f(x) = \text{Log}(x^2+4x+10)$ es creciente en $\mathbb{R}^+$

A) VVF B) FVV C) VFV
D) VVV E) FFF

Resolución:

En cada afirmación:

I. $f(x) = -\text{Log}_{\left(\frac{3}{4}\right)}x$



$\Rightarrow f(x)$ es creciente en $\langle 0;\infty\rangle$

La afirmación es verdadera (V)

II. $a^{-1} = \dfrac{1}{a} \in \langle 2;3\rangle \Rightarrow \dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2}$

La función es $f(x) = \text{Log}_a(x^2-16)$

Observa que f(x) es par y tiene dominio $x < -4 \vee x > 4$

* Criterio de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{\text{Ln}(a)} \cdot \frac{2x}{x^2-16} < 0$$

Simplificando tenemos:

$$\frac{x}{(x-4)(x-4)} > 0$$

En la recta real obtenemos:

$$-4 < x < 0 \vee x > 4$$

Por existencia:

$$x < -4 \vee x > 4$$

Ahora tenemos:

$$x > 4$$

$\Rightarrow f(x)$ es decreciente en $\langle 4\,;\,\infty\rangle$

La afirmación es verdadera (V)

III. $f(x) = \text{Log}(x^2+4x+10)$

$$f'(x) = \frac{1}{\text{Ln}(10)} \cdot \frac{2x+4}{x^2+4x+10} > 0$$

Simplificando tenemos:

$$\frac{x+2}{x^2+4x+10} > 0$$

$$x+2 > 0$$

$$x > -2$$

$\Rightarrow f(x)$ es creciente en $\langle -2;\infty\rangle$

La afirmación es verdadera (V)

$\therefore$ La combinación correcta es: VVV

Clave: D

Problema 19

Sean las funciones:

$f(x) = \text{Log}_{\frac{3}{2}}(3x-2x^2)$ y $g(x) = 2 - e^{-2x}$

Si $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ tiene como dominio $\langle a;b\rangle - \{c;d\}$.

Calcular: E = a + b + c + d.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Fácilmente reconocemos que $Dom(g) = \mathbb{R}$

* Para el dominio de f:

$$3x - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x < 0$$
$$x(2x-3) < 0$$

En forma equivalente: $0 < x < \frac{3}{2}$

* $Dom\left(\frac{g}{f}\right) = Dom(g) \cap Dom(f) - \{x \mid f(x) = 0\} \ldots (1)$

* $f(x) = 0 \Leftrightarrow Log_{\left(\frac{3}{2}\right)}(3x - 2x^2) = 0$

$$3x - 2x^2 = 1$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

2x -1
x -1

$$(2x-1)(x-1) = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \vee x = 1$$

Finalmente en (1):

$$Dom\left(\frac{g}{f}\right) = \left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle - \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$$

Ahora reconocemos:

$$a = 0 \; ; \; b = \frac{3}{2} \; ; c = \frac{1}{2} \; ; \; d = 1$$
$$\therefore \; E = a + b + c + d = 3$$

Clave: C

Problema 20

Sea la función

$$f(x) = Log_{0.5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + Log_2\sqrt{(2x-1)^2}$$

Halle el conjunto $Dom(f) \cap Ran(f)$.

A) $\left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ C) $\{1\}$

D) $\langle 2;4 \rangle$ E) $[1;2\rangle$

Resolución:

La función es:

$$f(x) = Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}\right) + Log_2\sqrt{(2x-1)^2}$$

Se cumple que: $x - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0$

Ahora se tiene:

$$f(x) = Log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}\right) + Log_2(2x-1)$$
$$f(x) = Log_2\left(\frac{2x-1}{2}\right)^{-1} + Log_2(2x-1)$$
$$f(x) = -\left[Log_2\left(\frac{2x-1}{2}\right)\right] + Log_2(2x-1)$$
$$f(x) = -Log_2(2x-1) + 1 + Log_2(2x-1)$$
$$f(x) = 1$$

Finalmente notamos que:

$$Dom(f) \cap Ran(f) = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle \cap \{1\}$$
$$\therefore \; Dom(f) \cap Ran(f) = \{1\}$$

Clave: C

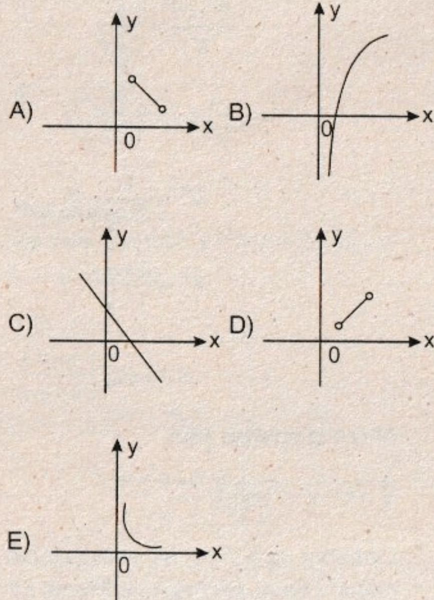
Problema 21

Si f es una función definida por:

$$f(x) = e^{Ln(2x)} + e^{Ln(x-24)} + 4e^{Ln(36-x)},$$

entonces la figura que mejor representa a la gráfica de f es:





Resolución:

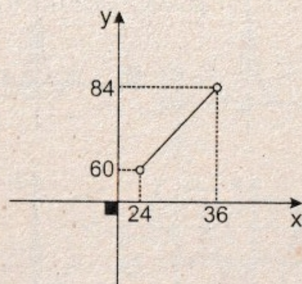
La función es:

$$f(x)=e^{\operatorname{Ln}(2x)}+e^{\operatorname{Ln}(x-24)}+4e^{\operatorname{Ln}(36-x)}$$

$$f(x)=2x+x-24+36-x\ ;\ 24<x<36$$

$$f(x)=2x+12\ ;\ 24<x<36$$

Graficando tenemos:



Clave: **D**

Problema 22

Si $f(x)=\operatorname{Log}_a(\alpha x+\beta)$; a > 1, señale el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si $\alpha<0$, entonces f es creciente

II. Si $\beta>0$, entonces f corta el eje y

III. Si $\alpha\neq 0$, entonces la gráfica de f es inyectiva.

A) FFV B) FVF C) FVV
D) FFF E) VVV

Resolución:

La función es: $f(x)=\operatorname{Log}_a(\alpha x+\beta)$; $a>1$

I. Si $\alpha<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente
La afirmación es falsa (F)

II. Si $\beta>0$, la gráfica de f(x) corta al eje y
La afirmación es verdadera (V)

III. Si $\alpha\neq 0\Leftrightarrow\alpha>0\vee\alpha<0$, entonces f(x) es una función inyectiva.
La afirmación es verdadera (V)

∴ La combinación correcta es: FVV

Clave: **C**

Problema 23

Sea la función:

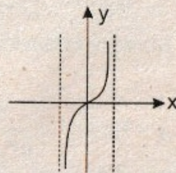
$$f:A\to B/f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$$

Determinar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. f es inyectiva

II. El dominio de f* es: $\langle -1;1\rangle$

III. Grafica de f* es:



A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVV E) FFF

Resolución:

La función es:

$$f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}$$

$$f(x)=\frac{4^x-1}{4^x+1}=1-\frac{2}{4^x+1}$$

I. Veamos la inyectividad:

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$1-\frac{2}{4^{x_1}+1}=1-\frac{2}{4^{x_2}+1}$$

$$4^{x_1}+1=4^{x_2}+1$$

$$4^{x_1}=4^{x_2}$$

$$x_1=x_2$$

Es evidente que f(x) es inyectiva, luego (I) es verdadero (V).

II. Como f es inyectiva: $Dom(f^*)=Ran(f)$

Hallemos Ran(f):

$$0<4^x<\infty$$

$$1<4^x+1<\infty$$

$$0<\frac{1}{4^x+1}<1$$

$$-2<-\frac{2}{4^x+1}<0$$

$$-1<1-\frac{2}{4^x+1}<1$$

$$-1<y<1$$

$\Rightarrow Ran(f)=Dom(f^*)=\langle -1;1\rangle$, luego (II) es verdadero (V)

III. $y=f(x)=1-\dfrac{2}{4^x+1}$

Reacomodando: $\dfrac{2}{4^x+1}=1-y$

$$\frac{4^x+1}{2}=\frac{1}{1-y}$$

$$4^x+1=\frac{2}{1-y}$$

$$4^x=\frac{2}{1-y}-1$$

$$4^x=\frac{1+y}{1-y}$$

$$x=Log_4\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Ahora la inversa será:

$$y=f^*(x)=Log_4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Observa que f*(x) es una función impar y tiene asintotas verticales x = 1 y x = – 1, fácilmente reconocemos que (III) es verdadero (V)

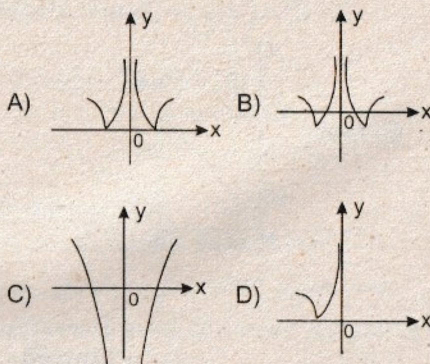
∴ La combinación correcta es: VVV

Clave: A

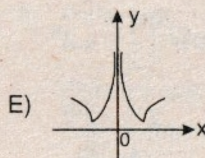
Problema 24

Dada la función:

$f(x)=|Ln|x|-1|$, la grafica que mejor representa a dicha función es:



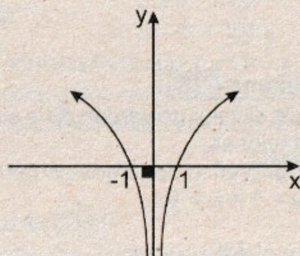


E) 

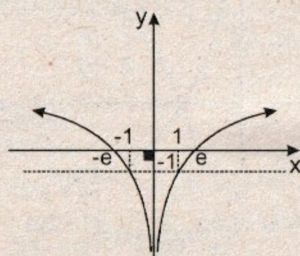
Resolución:

Se pide graficar: $y = f(x) = |\text{Ln}|x| - 1|$

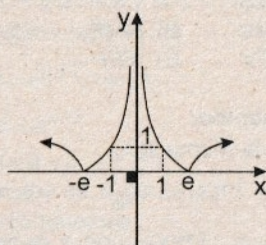
I. $y = \text{Ln}|x|$



II. $y = \text{Ln}|x| - 1$



III. $y = f(x) = |\text{Ln}|x| - 1|$



Clave: A

Problema 25

Determine el cardinal del conjunto

$$G = \{x / |\text{Log}_2 x| = |\text{Cos}\, x|\}$$

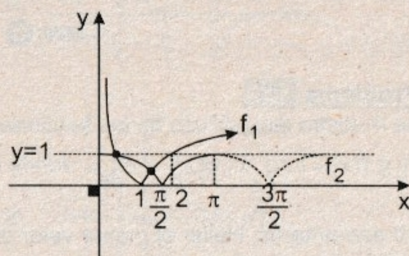
A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

Resolución:

En la ecuación: $\underbrace{|\text{Log}_2 x|}_{f_1} = \underbrace{|\cos(x)|}_{f_2}$

Graficando:



Como las gráficas de f_1 y f_2 se intersecan en dos puntos, decimos que $f_1 = f_2$ tiene dos soluciones.

$\therefore$ Cardinal de G = n(G) = 2

Clave: C

Problema 26

Sea $f(x) = \text{Log}_5(x-1) + \text{Log}_5(x+1)$ halle la regla de correspondencia de la función f* (x).

A) $\sqrt{5^{x-1}}$ B) $\sqrt{5^x + 1}$

C) $\sqrt{5^{x-1} + 1}$ D) $\sqrt{5^{x+1} - 1}$

E) $\sqrt{5^x - 5}$

Resolución:

Fácilmente podemos reconocer que la función y = f(x) es inyectiva en su dominio $x \in \langle 1; \infty \rangle$



* Hallemos la función inversa.

$$f(x)=\text{Log}_5(x-1)+\text{Log}_5(x+1)$$

$$f(x)=\text{Log}_5(x^2-1)$$

$$y=\text{Log}_5(x_2-1)\Rightarrow 5^y=x^2-1$$

$$5^y+1=x^2$$

$$\sqrt{5^y+1}=x$$

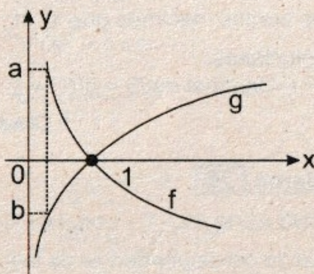
$$x=\sqrt{5^y+1}$$

Ahora la inversa es: $f^*(x)=\sqrt{5^x+1}$

Clave: B

Problema 27

Se muestra las gráficas de las funciones f y g $f(x)=\text{Log}_{\frac{1}{2}}x$; $g(x)=\text{Log}_4 x$ donde a y b son enteros. Hallar el menor valor de $(2a-b)^2$, si a es el menor entero posible.



A) 9 B) 16 C) 25
D) 36 E) 49

Resolución:

De la gráfica: $f(x)=a\wedge g(x)=b$

$$\text{Log}_{\left(\frac{1}{2}\right)}x=a\wedge \text{Log}_4x=b$$

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^a\wedge 4^b=x$$

Ahora podemos plantear: $\left(\frac{1}{2}\right)^a=4^b$

$$2^{-a}=2^{2b}$$

$$-a=2b$$

Por comparación: $b=-1\wedge a=2$

$$\Rightarrow (2a-b)^2=(4+1)^2=(5)^2$$

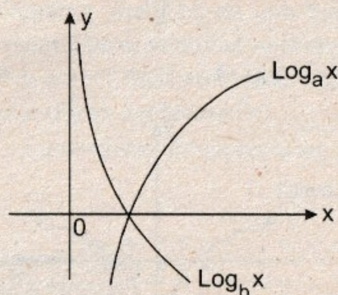
$$\therefore (2a-b)^2=25$$

Clave: C

Problema 28

Señale el valor de verdad de la siguientes afirmaciones:

I. Del gráfico podemos afirmar: $a>1>b>0$.



II. $f(x)=\text{Log}_{4x^2+4x+1}(1+2x)$ es constante en $x>-\frac{1}{2}$.

III. $\text{Log}x^2=2$ si y solo si $x=10$

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) FFF

Resolución:

En cada afirmación:

I. $a>1: f(x)=\text{Log}_a x$ es creciente.

$0<b<1: h(x)=\text{Log}_b x$ es decreciente

La afirmación es verdadera (V)

II. $f(x) = \text{Log}_{(2x+1)^2}(2x+1)$

Observa que si $2x+1>0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$

Equivalentemente:

$x > -\dfrac{1}{2} \rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$ (constante)

La afirmación es verdadera (V)

III. $\text{Log}\, x^2 = 2 \Rightarrow 10^2 = x^2$

$$0 = x^2 - 10^2$$
$$0 = (x+10)(x-10)$$

De aquí notamos que $x = 10 \vee x = -10$

La afirmación es falsa (F)

$\therefore$ La combinación correcta es: VVF

Clave: B

Problema 29

Si el punto (a ; 1) pertenece a la función f; $f(x) = e^{x+2} - (\sqrt{|1-e|})^{\text{Ln}e^2}$, determine el valor de $E = \text{Ln}(|a|+1)$.

A) 0 B) 1 C) Ln2
D) 4 E) 5

Resolución:

La función es:

$$f(x) = e^{x+2} - (\sqrt{|1-e|})^{\text{Ln}e^2}$$
$$f(x) = e^{x+2} - \sqrt{|1-e|}^{\,2}$$
$$f(x) = e^{x+2} - |1-e|$$
$$f(x) = e^{x+2} - e + 1$$

Por condición $(a;1) \in f$:

$$1 = e^{a+2} - e + 1$$
$$e = e^{a+2}$$
$$1 = a+2$$
$$-1 = a$$

Finalmente tenemos:

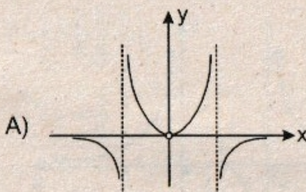
$$E = \text{Ln}(|a|+1)$$
$$E = \text{Ln}(1+1)$$
$$\therefore E = \text{Ln}(2)$$

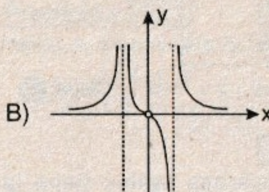
Clave: C

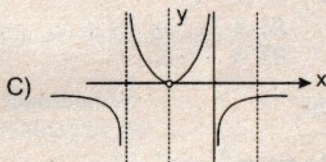
Problema 30

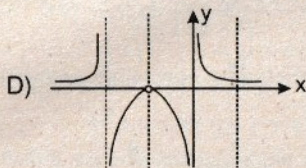
Indicar la gráfica de f, si

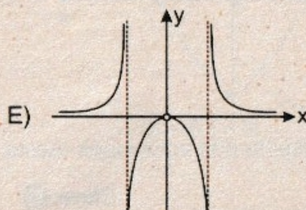
$$f(x) = \frac{1}{\text{Log}|x+1|}\ ;\ x \neq -1\ ;\ -2;0$$

A)


B)


C)


D)


E)


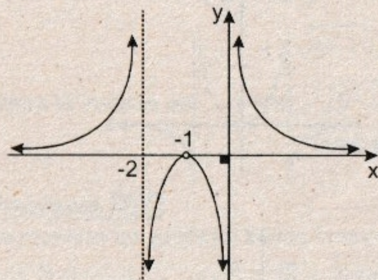
Resolución:
Se pide graficar:

$$f(x)=\frac{1}{\text{Log}|x+1|}\ ;\ x\neq -1$$

*. Asintota vertical: $\text{Log}|x+1|=0$

$$|x+1|=1$$
$$x+1=1 \vee x+1=-1$$
$$x=0 \vee x=-2$$

Graficando:



Clave: **D**

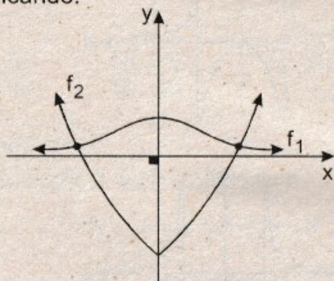
Problema 31
¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $e^{-x^2}=x^2-2$?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución:

La ecuación es: $\underbrace{e^{-x^2}}_{f_1}=\underbrace{x^2-2}_{f_2}$

Graficando:



$\therefore\ f_1=f_2$ presenta dos soluciones reales

Clave: **C**

Problema 32
El rango de la función

$$f(x)=(5^{\text{Log}_3 2}-2^{\text{Log}_3 5})e^{x^2}+e^{(\text{Sgn}(x))x}$$

es $[a;\infty\rangle$, entonces el valor de a^5+a-2 es:

A) 0 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

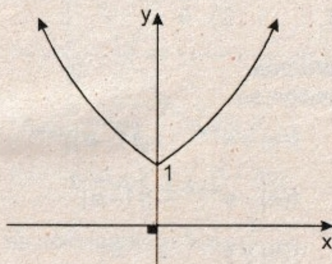
Resolución:
La función es:

$$f(x)=\underbrace{(5^{\text{Log}_3 2}-2^{\text{Log}_3 5})}_{\text{Es cero}}e^{x^2}+e^{(\text{Sgn}(x))x}$$

$\Rightarrow f(x)=e^{(\text{Sgn}(x))x}$
Redefiniendo la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & ;\ x>0 \\ 1 & ;\ x=0 \\ e^{-x} & ;\ x<0 \end{cases}$$

Graficando tenemos:



$\Rightarrow \text{Ran}(f)=[1;\infty\rangle$
Fácilmente reconocemos que a = 1

$$\therefore\ a^5+a-2=0$$

Clave: **A**

Problema 33
Simplificar:

$$E=\text{Log}_{5\sqrt[3]{8}}\sqrt[3]{2}+\text{Log}_{3\sqrt{3}}\sqrt[3]{3}+\text{Log}_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{5}$$

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{11}{9}$

D) $\frac{13}{9}$ E) 2

Resolución:

Se tiene:

$$E = \text{Log}_{\sqrt[5]{8}}\sqrt[3]{2} + \text{Log}_{3\sqrt{3}}\sqrt[3]{3} + \text{Log}_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{5}$$

$$E = \text{Log}_8\sqrt[3]{2}^5 + \text{Log}_{27}\sqrt[3]{3}^2 + \text{Log}_5\sqrt[3]{5}^2$$

$$E = \text{Log}_2\sqrt[9]{2}^5 + \text{Log}_3\sqrt[9]{3}^2 + \text{Log}_5\sqrt[3]{5}^2$$

$$E = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3}$$

$$E = \frac{7}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7+6}{9}$$

$$\therefore\ E = \frac{13}{9}$$

Clave: D

Problema 34

Simplificar:

$$T = \left(\text{Log}_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[3]{49}\right)\right) \cdot \left(49^{0,5\text{Log}_7(0,25)}\right)$$

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

Resolución:

Se tiene:

$$T = \left[\text{Log}_{\left(\frac{1}{7}\right)}\left(\sqrt[3]{49}\right)\right]\left[49^{\frac{1}{2}\text{Log}_7\left(\frac{1}{4}\right)}\right]$$

$$T = \left[\text{Log}_7\sqrt[3]{7}^{-2}\right]\left[49^{\text{Log}_7\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)}\right]$$

$$T = \left[-\frac{2}{3}\right]\left[49^{\text{Log}_{49}\left(\frac{1}{4}\right)}\right]$$

$$T = \left[-\frac{2}{3}\right]\left[\frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore\ T = -\frac{1}{6}$$

Clave: C

Problema 35

Hallar el dominio de la función:

$$f(x) = \text{Ln}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+99}}{|3x-1|}\right) + \sqrt[7]{1-x^2}$$

A) $\mathbb{R}^-$ B) $\mathbb{R}^+$ C) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

D) $\mathbb{R} - \{1\}$ E) $\mathbb{R} - \{0\}$

Resolución:

La función es:

$$f(x) = \text{Ln}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+99}}{|3x-1|}\right) + \sqrt[7]{1-x^2}$$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$x^2 + x + 99 > 0\ ;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Ahora sólo se debe cumplir que:

$$|3x-1| \neq 0$$

$$x \neq \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

Clave: C

Problema 36

Sabiendo que a y b son las raíces positivas de la ecuación $x^2-3x+m^2=0$. Halle el valor de:

$$S=Log_m a^b+Log_m a^a+Log_m b^b+Log_m b^a$$

A) 1 B) 2 C) 6

D) 8 E) 10

Resolución:

En la cuadratica: $x^2-3x+m^2=0$

Propiedad de raíces: $a+b=3$ y $ab=m^2$

Se pide calcular:

$$S=Log_m a^b+Log_m a^a+Log_m b^b+Log_m b^a$$

$$S=Log_m(a^b\cdot a^a\cdot b^b\cdot b^a)$$

$$S=Log_m(a^{a+b}\cdot b^{a+b})$$

$$S=Log_m(a^3\cdot b^3)=Log_m(ab)^3$$

$$S=3\cdot Log_m(ab)=3Log_m(m^2)$$

$$S=3\cdot 2Log_m m=6\cdot(1)$$

$$\therefore\ S=6$$

Clave: **C**

Problema 37

Si $\dfrac{1\cdot 2Log_a y}{1+2Log_b y}=4$; $a=xy$; $b=\dfrac{x}{y}$

Calcule el valor de:

$$T=|Log_a b|+|Log_b a|$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$

D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Resolución:

Datos: $a=xy\wedge b=\dfrac{x}{y}$

Por condición: $\dfrac{1-2Log_a y}{1+2Log_b y}=4$

$$1-2Log_a y=4+8Log_b y$$

En función de la base diez:

$$1-\frac{2Log\,y}{Log\,a}=4+\frac{8Log\,y}{Log\,b}$$

$$1-\frac{2Log\,y}{Log\,x+Log\,y}=4+\frac{8Log\,y}{Log\,x-Log\,y}$$

$$\frac{Log\,x-Log\,y}{Log\,x+Log\,y}=\frac{4(Log\,x+Log\,y)}{Log\,x-Log\,y}$$

$$(Log\,x-Log\,y)^2=4(Log\,x+Log\,y)^2$$

De aquí tenemos:

$Logx-Logy=2Logx+2Logy\vee Logx-Logy=$
$-2logx-2Logy$

$-3Logy=Logx\vee Logy=-3Logx$

Se pide calcular: $T=|Log_a b|+|Log_b a|$

$$T=|Log_a b|+\left|\frac{1}{Log_a b}\right|$$

* $Log_a b=\dfrac{Log\,b}{Log\,a}=\dfrac{Log\,x-Log\,y}{Log\,x+Log\,y}$

Si $Log\,x=-3Log\,y\Rightarrow Log_a b=\dfrac{-4Log\,y}{-2Log\,y}$

$$Log_a b=2$$

$$\Rightarrow\ T=|2|+\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$T=2+\frac{1}{2}$$

$$T=\frac{5}{2}$$



Si $\text{Log}\,y = -3\text{Log}\,x \Rightarrow \text{Log}_a b = \dfrac{-4\text{Log}\,x}{-2\text{Log}\,x}$

$$\text{Log}_a b = -2$$

$$\Rightarrow T = |-2| + \left|\frac{1}{-2}\right|$$

$$T = 2 + \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{5}{2}$$

***Clave:* E**

Problema 38

Determine el valor de x en la igualdad

$$\sqrt{99}^{x(1+\text{Log}_{99}x)} = \sqrt[3]{66}$$

A) $\dfrac{1}{9}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{3}{2}$

Resolución:

La ecuación es:

$$\left(\sqrt{99}\right)^{x\left(1+\text{Log}_{99}x\right)} = \sqrt[3]{66}$$

$$\sqrt{99}^{x+x\text{Log}_{99}x} = \sqrt[3]{66}$$

Elevando al cuadrado:

$$99^{x+x\text{Log}_{99}x} = \sqrt[3]{66}^2$$

Por teorema tenemos:

$$99^x \cdot 99^{x\text{Log}_{99}x} = (66)^{\frac{2}{3}}$$

$$99^x \cdot 99^{\text{Log}_{99}x^x} = (66)^{\frac{2}{3}}$$

$$99^x \cdot x^x = (66)^{\frac{2}{3}}$$

Dando forma tenemos:

$$(99x)^x = (66)^{\frac{2}{3}}$$

$$(99x)^x = \left(99 \cdot \frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ x = \frac{2}{3}$$

***Clave:* D**

Problema 39

Si $A = \text{Log}2 \cdot \text{Log}_9 3 \cdot \text{Log}_8 4 \cdot ...$

$... \text{Log}_4 8 \cdot \text{Log}_3 9 \cdot \text{Log}_2 10$

$B = \text{Log}_2 \sqrt[4]{8}$

Calcular:

$$k = \text{Log}_B\left(A - \frac{1}{2}\right)^2$$

A) 1 B) 2 C) $\dfrac{9}{4}$

D) $\dfrac{13}{4}$ E) 4

Resolución:

En cada caso:

$$A = \text{Log}2 \cdot \text{Log}_9 3 \cdot \text{Log}_8 4 \cdot \text{Log}_7 5 \cdot \text{Log}_6 6 \cdot \text{Log}_5 7 \cdot \text{Log}_4 8 \cdot \text{Log}_3 9 \cdot \text{Log}_2 10$$

$$A = (\text{Log}2 \cdot \text{Log}_2 10)(\text{Log}_9 3 \cdot \text{Log}_3 9)... (\text{Log}_7 5 \cdot \text{Log}_5 7)\text{Log}_6 6$$

$$A = (1)\cdot(1)......(1)\cdot(1) \Rightarrow A = 1$$

$$B = \text{Log}_2 \sqrt[4]{8} = \text{Log}_2 \sqrt[4]{2}^3 \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

Finalmente:

$$k = \text{Log}_B\left(A - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$k = \text{Log}_{\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$k = 2\cdot\text{Log}_{\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$k = 2(1)$$

$$\therefore\ k = 2$$

Clave: B

Problema 40

Si se cumple la condición:

$$\text{Log}\left(\sqrt[\text{LogA}]{B}\right) + \text{Log}\left(\sqrt[\text{LogB}]{A}\right) = 2$$

Determinar el valor de:

$$E = \text{Log}\left(\frac{2A}{A+B}\right) + \text{Log}\left(\frac{2A^2}{A^2+B^2}\right) + \ldots +$$

$$\text{Log}\left(\frac{2A^n}{A^n+B^n}\right)$$

A) 0 B) 2n

C) n D) $A^n + B^n$

E) $2(A^n + B^n)$

Resolución:

Por condición:

$$\text{Log}\left(B^{\frac{1}{\text{Log}A}}\right) + \text{Log}\left(A^{\frac{1}{\text{Log}B}}\right) = 2$$

$$\frac{\text{Log}B}{\text{Log}A} + \frac{\text{Log}A}{\text{Log}B} = 2$$

$$\text{Log}^2B + \text{Log}^2A = 2\text{log}B\cdot\text{Log}A$$

$$\text{Log}^2B + \text{Log}^2A - 2\text{Log}B\cdot\text{Log}A = 0$$

$$(\text{Log}B - \text{Log}A)^2 = 0$$

$$\text{Log}B - \text{Log}A = 0$$

$$\text{Log}B = \text{Log}A$$

De donde reconocemos que: A = B

Finalmente tenemos:

$$E = \text{Log}(1) + \text{Log}(1) + \ldots. + \text{Log}(1)$$

$$E = 0 + 0\ldots. + 0$$

$$\therefore\ E = 0$$

Clave: A

Problema 41

Si $2010^5 x^{\text{Log}_{2010}x} = x^6$, $\forall x \in \{a;b\}$; determinar el valor de ab.

A) 1 B) Log2010

C) 2010Log2 D) 2010Log^5

E) 2010^6

Resolución:

La ecuación dada es:

$$2010^5 \cdot x^{\text{Log}_{2010}x} = x^6$$

$$x^{\text{Log}_{2010}x} = \frac{x^6}{2010^5}$$

Considerando logaritmos en ambos miembros:

$$\text{Log}_{2010}(x^{\text{Log}_{2010}x}) = \text{Log}_{2010}\left(\frac{x^6}{2010^5}\right)$$

$$(\text{Log}_{2010}x)(\text{Log}_{2010}x) = \text{Log}_{2010}x^6 - \text{Log}_{2010}2010^5$$

$$(\text{Log}_{2010}x)^2 = 6\cdot\text{Log}_{2010}x - 5$$

$$(\text{Log}_{2010}x)^2 - 6(\text{Log}_{2010}x) + 5 = 0$$

$$(\text{Log}_{2010}x - 1)(\text{Log}_{2010}x - 5) = 0$$

$$\text{Log}_{2010}x = 1 \vee \text{Log}_{2010}x = 5$$

$$x_1 = 2010 \vee x_2 = 2010^5$$



Por condición: $x_1 \cdot x_2 = ab = 2010 \cdot 2010^5$

$$\therefore\ ab = 2010^6$$

Clave: E

Problema 42

Hallar el producto de los valores de x que satisfacen:

$$\left(2\sqrt{12}+3\sqrt{3}+6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$$

A) -9 B) -7 C) -5
D) -3 E) -1

Resolución:

En la ecuación

$$\left(2\sqrt{4\cdot 3}+3\sqrt{3}+6\sqrt{\frac{3}{9}}\right)^{\frac{4}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$$

$$\left(4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{5}} = \sqrt{3}^{2x^2-2x-2}$$

$$\left(9\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{5}} = \sqrt{3}^{2x^2-2x-2}$$

$$(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{5}} = \sqrt{3}^{2(x^2-x-1)}$$

$$(3^{\frac{5}{2}})^{\frac{4}{5}} = 3^{x^2-x-1}$$

$$3^2 = 3^{x^2-x-1}$$

Por teorema: $x^2-x-1=2$

$$x^2-x-3=0$$

$$\therefore\ x_1 \cdot x_2 = -3$$

Clave: D

Problema 43

Sea S el conjunto solución de la ecuación

$$\pi - e^{|x|-1} = |x|$$

Halle la suma de los elementos de S.

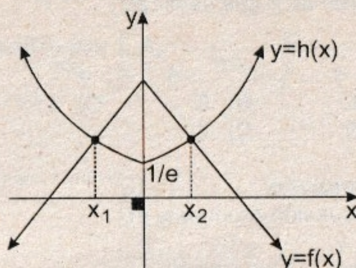
A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución:

La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\underbrace{\pi - |x|}_{f(x)} = \underbrace{e^{|x|-1}}_{h(x)}$$

Graficando tenemos:



Observa que f(x) = h(x) tiene 2 soluciones.

$cs = s = \{x_1, x_2\}$

De la simetría fácilmente podemos reconocer que $x_1 = -x_2$.

$$\therefore\ x_1 + x_2 = 0$$

Clave: B

Problema 44

Al resolver la ecuación:

$$3^{n+5} + x^x = 9(3^n x^x + 3);\ n \in \mathbb{Z}^+$$

Calcular: $(x-1)^x$

A) 1 B) 8 C) 81
D) 6 E) 1024

Resolución:
La ecuación propuesta es:

$$3^{n+5}+x^x=9(3^n\cdot x^x+3)$$

$$3^{n+5}+x^x=3^{2+n}\cdot x^x+3^3$$

$$3^{n+5}-3^3=3^{2+n}\cdot x^x-x^x$$

$$3^3(3^{n+2}-1)=(3^{2+n}-1)\cdot x^x$$

Como $n\in\mathbb{Z}^+$; $x^x=3^3\Rightarrow x=3$

$$\therefore\ (x-1)^x=8$$

Clave: **B**

Problema 45
Calcular la suma de los cuadrados de los valores de x que verifican:

$$4^{x^2+\frac{1}{2}}-3^{2x^2}=4^{x^2-\frac{1}{2}}-3^{2x^2-1}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:
La ecuación propuesta es:

$$4^{x^2+\frac{1}{2}}-4^{x^2-\frac{1}{2}}=3^{2x^2}-3^{2x^2-1}$$

$$4^{x^2-\frac{1}{2}}(4^1-1)=3^{2x^2-1}\cdot(3^1-1)$$

$$(2^2)^{x^2-\frac{1}{2}}\cdot(3)=3^{2x^2-1}\cdot 2$$

$$2^{2x^2-1}\cdot 3=3^{2x^2-1}\cdot 2$$

$$\frac{2^{2x^2-1}}{2}=\frac{3^{2x^2-1}}{3}$$

$$2^{2x^2-2}=3^{2x^2-2}$$

Por propiedad:

$$2x^2-2=0$$

$$x^2-1=0$$

$$(x+1)(x-1)=0$$

De donde obtenemos:

$$x_1=1\vee x_2=-1$$

$$\therefore\ x_1^2+x_2^2=2$$

Clave: **A**

Problema 46
Halle la suma de los elementos del conjunto

$$\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^{\sqrt{2x-1}}=(\sqrt{x})^x\right\}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 8 E) 9

Resolución:
En la ecuación:

$$x^{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x}^{\,x}$$

Por existencia: $2x-1\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$

Ahora tenemos: $x^{\sqrt{2x-1}}=x^{\frac{x}{2}}$

$$\sqrt{2x-1}=\frac{x}{2}$$

Al cuadrado:

$$2x-1=\frac{x^2}{4}$$

$$8x-4=x^2$$

Por simetría:

$$x^2=8x-4$$

$$x^2-8x+4=0$$

$$(x-4)^2-12=0$$

$$(x-4+\sqrt{12})(x-4-\sqrt{12})=0$$

$$x-4+\sqrt{12}=0\vee x-4-\sqrt{12}=0$$

$$x_1=4-\sqrt{12}\vee x_2=4+\sqrt{12}$$



Fácilmente podemos reconocer que x_1, $x_2 \geq \frac{1}{2}$. Por tanto ambas son soluciones de la ecuación.

$$\therefore\ x_1 + x_2 = 8$$

Clave: D

Problema 47

Resolver:

$$\frac{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}} = \sqrt{e}+\sqrt{e-1}$$

A) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ B) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

D) $\{2\}$ E) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$\frac{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}} = \frac{\sqrt{e}+\sqrt{e-1}}{1}$$

Por propiedad de proposiciones

$$\frac{\sqrt{e^x+1}}{\sqrt{e^x-1}} = \frac{\sqrt{e}+\sqrt{e-1}+1}{\sqrt{e}+\sqrt{e-1}-1}$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}+1)^2}{(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}-1)^2}$$

Por propiedad de proporcionar:

$$e^x = \frac{(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}+1)^2+(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}-1)^2}{(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}+1)^2-(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}-1)^2}$$

De acuerdo con la equivalencia de Legendre tenemos:

$$e^x = \frac{2\left[\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}\right)^2+1\right]}{4\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}\right)(1)}$$

$$e^x = \frac{e+e-1+2\sqrt{e}\sqrt{e-1}+1}{2\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}\right)}$$

$$e^x = \frac{2e+2\sqrt{e}\sqrt{e-1}}{2\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}\right)}$$

$$e^x = \frac{2\sqrt{e}\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}\right)}{2\left(\sqrt{e}+\sqrt{e-1}\right)}$$

Simplificando:

$$e^x = \sqrt{e}$$

$$e^x = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ CS = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Clave: B

Problema 48

Sea S el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{1}{4^{2x}+4} - \frac{1}{8} = \frac{4^x-2}{2^{4x+1}+8}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. La cardinalidad de S es mayor que 1

II. Existe un $x \in S / x \in \langle -1/2\, ,\, 1/2\rangle$

III. Para todo $x \in S : x \in \langle 0,1\rangle$

A) VFV B) FVV C) FFV

D) VVF E) FVF

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$\frac{1}{4^{2x}+4}-\frac{1}{8}=\frac{4^x-2}{2^{4x}\cdot 2+8}$$

$$\frac{1}{(4^x)^2+4}-\frac{1}{8}=\frac{4^x-2}{(4^x)^2\cdot 2+8}$$

Hagamos que $4^x = m > 0$, luego:

$$\frac{1}{m^2+4}-\frac{1}{8}=\frac{m-2}{2m^2+8}$$

$$\frac{1}{m^2+4}-\frac{m-2}{2m^2+8}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{2-m+2}{2m^2+8}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{4-m}{2(m^2+4)}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{4-m}{m^2+4}=\frac{1}{4}$$

$$16-4m=m^2+4$$

Por simetría:

$$m^2+4=16-4m$$

$$\underbrace{m^2+4m-12}_{\text{Aspa simple}}=0$$

$$(m+6)(m-2)=0$$

$$m=-6 \vee m=2$$

Como $m > 0$, aceptamos $m = 2$:

$$4^x=m$$

$$2^{2x}=2^1$$

Por teorema:

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Ahora tenemos:

$$CS=s=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Finalmente para cada afirmación tenemos:

I) F   II) F   III) V

Problema 49

Hallar la menor solución en la ecuación:

$$(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

A) -1 B) $1-\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 1 E) $1+\sqrt{2}$

Resolución:

Observa que: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$$2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\ldots(1)$$

La ecuación dada es:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

Multiplicando por $2-\sqrt{3}$ tenemos:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}\cdot\underbrace{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}_{1}+\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=4\ldots(2)$$



Reemplazando (1) en (2):

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{-(x^2-2x)}=4$$

Hagamos que $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x}=m>0$,

luego: $m+m^{-1}=4$

Multiplicando por m:

$$m^2+1=4m$$

$$m^2-4m+1=0$$

$$(m-2)^2-3=0$$

$$(m-2+\sqrt{3})(m-2-\sqrt{3})=0$$

$$m=2-\sqrt{3}\vee m=2+\sqrt{3}$$

Si $m=2-\sqrt{3}:(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=2-\sqrt{3}$

$$(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=(2+\sqrt{3})^{-1}$$

$$x^2-2x=-1$$

$$x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0$$

$$x=1$$

Si $m=2+\sqrt{3}:(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=2+\sqrt{3}$

$$x^2-2x=1$$

$$x^2-2x-1=0$$

$$(x-1)^2-2=0$$

$$(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})=0$$

$$x=1-\sqrt{2}\vee x=1+\sqrt{2}$$

Finalmente tenemos:

$$CS=\left\{1-\sqrt{2};1;1+\sqrt{2}\right\}$$

$\therefore$ Menor solución $=1-\sqrt{2}$

***Clave:* B**

Problema 50

Hallar la suma de los valores de x que verifican la ecuación:

$$\text{Log}_{(3-x)}(x^2-2x^2-x+3)=0$$

A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$\text{Log}_{(3-x)}(x^3-2x^2-x+3)=0$$

Por definición tenemos:

$$x^3-2x^2-x+3=(3-x)^0$$

$$x^3-2x^2-x+3=1$$

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

Factorizando al polinomio cúbico:

$$(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

$$x=1;\ x=2;\ x=-1$$

Por existencia del logaritmo: $3-x\neq 1$
$x\neq 2$

Ahora solo aceptamos: $x=1$; $x=-1$

$\therefore$ Suma de soluciones = 0

***Clave:* B**

Problema 51

Resolver la siguiente ecuación:

$$\text{Log}_x 3\cdot\text{Log}_{\left(\frac{x}{3}\right)}3+\text{Log}_{\left(\frac{x}{81}\right)}3=0$$

Dar como respuesta la suma de las soluciones

A) $\frac{79}{9}$ B) $\frac{80}{9}$ C) 9
D) $\frac{82}{9}$ E) $\frac{83}{9}$

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$\log_x 3 \cdot \log_{\left(\frac{x}{3}\right)} 3 + \log_{\left(\frac{x}{81}\right)} 3 = 0$$

Expresando en función de la base tres:

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)} + \frac{1}{\log_3\left(\frac{x}{81}\right)} = 0$$

$$\frac{1}{\log_3 x \cdot (\log_3 x - \log_3 3)} + \frac{1}{\log_3 x - \log_3 81} = 0$$

$$\frac{1}{\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1)} + \frac{1}{\log_3 x - 4} = 0$$

Hagamos que $\log_3 x = m$, luego:

$$\frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m-4} = 0$$

$$\frac{m-4+m(m-1)}{m(m-1)(m-4)} = 0$$

$$m - 4 + m(m-1) = 0$$

$$m - 4 + m^2 - m = 0$$

$$m^2 - 4 = 0$$

$$(m+2)(m-2) = 0$$

$$m = 2 \vee m = -2$$

Si m = 2: $\log_3 x = 2$

$$3^2 = x$$

$$9 = x_1$$

Si m = – 2: $\log_3 x = -2$

$$3^{-2} = x$$

$$\frac{1}{9} = x_2$$

Finalmente tenemos:

$$x_1 + x_2 = 9 + \frac{1}{9}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{82}{9}$$

***Clave:* D**

Problema 52

Al resolver la ecuación:

$$\text{Log}_a^2(a^a x) + \text{Log}_a^2(ax) + \text{Log}_a x^2 = a^2 - 4a + 1$$

una de sus soluciones es:

A) a^2+1 B) a^{a-1} C) 2^{a+1}

D) $2a^a - 1$ E) a^{-a}

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$\log_a^2(a^a x) + \log_a^2(ax) + \log_a x^2 = a^2 - 4a + 1$$

$$[\log_a(a^a \cdot x)]^2 + [\log_a(ax)]^2 + \log_a x^2 = a^2 - 4a + 1$$

$$(\log_a a^a + \log_a x)^2 + (\log_a a + \log_a x)^2 + 2\log_a x = a^2 - 4a + 1$$

$$(a + \log_a x)^2 + (1 + \log_a x)^2 + 2\log_a x = a^2 - 4a + 1$$

$$a^2 + 2a\log_a x + \log_a^2 x + 1 + 2\log_a x + \log_a^2 x + 2\log_a x = a^2 - 4a + 1$$

Reduciendo obtenemos:

$$2\log_a^2 x + (2a+4)\log_a x + 4a = 0$$

$$\log_a^2 x + (a+2)\log_a x + 2a = 0$$

$\log_a x$ ⟍⟋ a

$\log_a x$ ⟋⟍ 2

$$(\log_a x + a)(\log_a x + 2) = 0$$



Por el teorema del producto nulo:

$$\log_a x = -a \vee \log_a x = -2$$

$$\therefore\ x = a^{-a} \vee x = a^{-2}$$

Clave: E

Problema 53

Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

I. $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$ si y solo si $x < \frac{7}{2}$

II. $(5)^{1-3x} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{x+4}$ si y solo si $x \ge \frac{5}{2}$

III. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-3} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+5}$ si y solo si $x \le 8$

A) VVV B) VFV C) VFF
D) VFF E) VVF

Resolución:

En cada afirmación

I. $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$

$$2^{x-1} < 2^{6-x}$$
$$x-1 < 6-x$$
$$2x < 7$$
$$x < \frac{7}{2}$$

$\Rightarrow$ La afirmación es verdadera (V)

II. $5^{1-3x} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{x+4}$

$$5^{1-3x} \le 5^{-x-4}$$
$$1-3x \le -x-4$$
$$-2x \le -5$$
$$x \ge \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ La afirmación es verdadera (V)

III. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-3} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+5}$

$$-2x-3 \ge -x+5$$
$$-x \ge 8$$
$$x \le -8$$

$\Rightarrow$ La afirmación es falsa (F)

$\therefore$ La combinación correcta es: VVF

Clave: E

Problema 54

Resolver:

$$(3^x)^{2x-7} < \frac{1}{27}$$

A) $\langle 0;1\rangle$ B) $\langle -1;4\rangle$ C) $\langle 0;3\rangle$

D) $\left\langle \frac{1}{2};3\right\rangle$ E) $\mathbb{R}$

Resolución:

La inecuación propuesta es:

$$(3^x)^{2x-7} < \frac{1}{27}$$

$$3^{2x^2-7x} < 3^{-3}$$

Por teorema: $2x^2-7x < -3$

$$\underbrace{2x^2-7x+3}_{\text{aspa simple}} < 0$$

$$(2x-1)(x-3) < 0$$

En forma equivalente:

$$\frac{1}{2} < x < 3$$

$$\therefore\ cs = \left\langle \frac{1}{2};3\right\rangle$$

Clave: D

Problema 55

Si (a ; b) es el conjunto solución de la inecuación:

$4(9^x)-7(3^{x+1})+5<0$, entonces $b-a$ es igual a:

A) $\text{Log}_3 20$ B) $\text{Log}_3 21$ C) $\text{Log}_3 24$

D) $\text{Log}_3 28$ E) $\text{Log}_3 48$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$4(3^x)^2-7(3^x)(3)+5<0$$

$$\underbrace{4(3^x)^2-21(3^x)+5}_{\text{Aspa simple}}<0$$

$$(4\cdot 3^x-1)(3^x-5)<0$$

En forma equivalente:

$$\frac{1}{4}<3^x<5$$

$$\log_3\left(\frac{1}{4}\right)<\log_3 3^x<\log_3 5$$

$$\log_3\left(\frac{1}{4}\right)<x<\log_3 5$$

Por condición: $a=\log_3\left(\frac{1}{4}\right)$ y $b=\log_3 5$

Finalmente tenemos:

$$b-a=\log_3 5-\log_3\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$b-a=\log_3\left(\frac{5}{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\therefore\ b-a=\log_3(20)$$

***Clave:* A**

Problema 56

Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$(2^{5-x}-x+2)(e^{3x}-e^{4x-5})<0$, entonces este conjunto es igual a:

A) $\langle 3;5\rangle$ B) $\langle 2;4\rangle$ C) $\langle 1;4\rangle$

D) $\langle 4;5\rangle$ E) $\langle 1;3\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$(2^{5-x}-x+2)(e^{3x}-e^{4x-5})<0$$

I. $2^{5-x}-x+2>0 \wedge e^{3x}-e^{4x-5}<0$

* $2^{5-x}-x+2>0 \Leftrightarrow 2^{5-x}>x-2$

Aquí reconocemos que x < 4

* $e^{3x}-e^{4x-5}<0 \Leftrightarrow e^{3x}<e^{4x-5}$

Por teorema tenemos: $3x<4x-5$

$$-x<-5$$
$$x>5$$

En la intersección:

$$\underbrace{(x<4)\wedge(x>5)}_{x\in\phi}$$

$\Rightarrow cs(I)=\phi$

II. $2^{5-x}-x+2<0 \wedge e^{3x}-e^{4x-5}>0$

* $2^{5-x}-x+2<0 \Leftrightarrow 2^{5-x}<x-2$

Aquí reconocemos que x > 4

* $e^{3x}-e^{4x-5}>0 \Leftrightarrow e^{3x}>e^{4x-5}$

Por teorema tenemos: $3x>4x-5$

$$-x>-5$$
$$x<5$$

En la intersección: $\underbrace{(x>4)\wedge(x<5)}_{4<x<5}$

$$\therefore\ cs=s=\langle 4;5\rangle$$

***Clave:* D**

Problema 57

Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x}\leq 34$$

entonces se puede afirmar:

A) $S\subset[0;4]$ B) $S\subset[-2;2]$

C) $S\cap\langle -3;3\rangle\neq\phi$ D) $S\cap\langle 0;1\rangle=\phi$

E) $S\neq\phi$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{x}+(\sqrt{3-\sqrt{8}})^{x}\leq 34$$

Observa que: $\sqrt{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{8}}=1$

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}....(\text{I})$$

En la inecuación:

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{x}+\frac{1}{(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{x}}\leq 34$$

Hagamos que $\sqrt{3+\sqrt{8}}^{\,x}=m>0$, luego:

$$m+\frac{1}{m}\leq 34$$

Multiplicando por m:

$$m^{2}+1\leq 34m$$

$$m^{2}-34m+1\leq 0$$

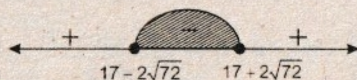
Hallemos los puntos de corte:

$$m^{2}-34m+1=0$$

$$m=\frac{34\pm\sqrt{(-34)^{2}-4}}{2}$$

$$m=17\pm 2\sqrt{72}$$

En la recta real:



Ahora tenemos:

$$17-2\sqrt{72}\leq m\leq 17+2\sqrt{72}$$

$$(\sqrt{17-2\sqrt{72}})^{2}\leq m\leq(17+2\sqrt{72})^{2}$$

9 8 9 8

$$(3-\sqrt{8})^{2}\leq m\leq(3+\sqrt{8})^{2}$$

$$\underbrace{(\sqrt{3-\sqrt{8}})^{4}}_{(\text{I})}\leq\sqrt{3+\sqrt{8}}^{\,x}\leq(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{4}$$

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{-4}\leq\sqrt{3+\sqrt{8}}^{\,x}\leq(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{4}$$

Finalmente tenemos:

$$-4\leq x\leq 4$$

$$\therefore\ cs=s=[-4\,;\,4]$$

***Clave:* C**

Problema 58

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\min\{3^{x}\,,\,30-x\}$$

Halle el conjunto solución de la inecuación $|f(x)|>1$.

A) $\langle 0;29\rangle$ B) $\langle 29;31\rangle$

C) $\langle 31;+\infty\rangle$ D) $\langle 0;+\infty\rangle$

E) $\langle 0;29\rangle\cup\langle 31;+\infty\rangle$

Resolución:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(x)=\text{mín}\{3^{x}\,,\,30-x\}$$

I. $f(x)=3^{x}\ ;\ x<3$

Por condición: $|f(x)|>1$

$$|3^{x}|>1$$

$$3^{x}>1$$

$$3^{x}>3^{0}$$

$$x>0$$

Con lo cual tenemos: $0 < x < 3$

$\Rightarrow cs(I) = \langle 0\,;\,3\rangle$

II. $f(x) = 30 - x\ ;\ x \geq 3$

Por condición: $|f(x)| > 1$

$$|30 - x| > 1$$

$$30 - x > 1 \vee 30 - x < -1$$

$$-x > -29 \vee -x < -31$$

$$x < 29 \vee -x > 31$$

Con lo cual tenemos: $3 \leq x < 29 \vee x > 31$

$\Rightarrow cs(II) = [3;29\rangle \cup \langle 31;\infty\rangle$

Finalmente tenemos:

$$cs = cs(I) \cup cs(II)$$

$$cs = \langle 0\,;\,29\rangle \cup \langle 31\,;\,\infty\rangle$$

Clave: E

Problema 59

Resolver la siguiente inecuación:

$$\left(\frac{1}{125}\right)^x 5^{-4x^2-1} \leq 5^{-x-2}\left(\frac{1}{625}\right)^{x^2-3x}$$

Dar su conjunto solución

A) $\left\langle \frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ B) $[1;+\infty\rangle$

C) $\left[\frac{1}{14};+\infty\right\rangle$ D) $\left[\frac{4}{5};+\infty\right\rangle$

E) $\left[\frac{1}{14};\frac{4}{5}\right]$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\left(\frac{1}{125}\right)^x \cdot 5^{-4x^2-1} \leq 5^{-x-2}\left(\frac{1}{625}\right)^{x^2-3x}$$

$$(5^{-3})^x \cdot 5^{-4x^2-1} \leq 5^{-x-2}(5^{-4})^{x^2-3x}$$

$$5^{-3x} \cdot 5^{-4x^2-1} \leq 5^{-x-2} \cdot 5^{-4x^2+12x}$$

$$5^{-4x^2-3x-1} \leq 5^{-4x^2+11x-2}$$

Por teorema:

$$-4x^2 - 3x - 1 \leq -4x^2 + 11x - 2$$

$$-14x \leq -1$$

$$x \geq \frac{1}{14}$$

$$\therefore\ cs = \left[\frac{1}{14}\,;\,\infty\right\rangle$$

Clave: C

Problema 60

Resolver la siguiente inecuación

$\text{Log}_x\left(\frac{x+4}{x-2}\right) > 1$. Dar el conjunto solución

A) $\langle -\infty;-1\rangle$ B) $\langle 2;4\rangle \cup \langle 6;8\rangle$

C) $\langle 2;4\rangle$ D) $\langle 0;2\rangle \cup \langle 2;3\rangle$

E) $\langle 2;\infty\rangle$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\log_x\left(\frac{x+4}{x-2}\right) > 1$$

$$\log_x\left(\frac{x+4}{x-2}\right) > \log_x x$$

I. Si: $0 < x < 1$ ....(1)

$$\frac{x+4}{x-2} > 0 \ \wedge\ x > 0 \ \wedge\ \frac{x+4}{x-2} < x$$

$$\frac{x+4}{x-2} > 0 \ \wedge\ x > 0 \ \wedge\ \frac{x+4}{x-2} - x < 0$$

$$\frac{x+4}{x-2} > 0 \ \wedge\ x > 0 \ \wedge\ \frac{-x^2+3x+4}{x-2} < 0$$

$$\frac{x+4}{x-2}>0 \wedge x>0 \wedge \frac{x^2-3x-4}{x-2}>0$$

$$(x<-4 \vee x>2)\wedge(x>0)\wedge(-1<x<2 \vee x>4)$$

En la intersección: $x>4$....................(2)

De (1) y (2): $cs(I)=\phi$

II. Si: $x>1$......................................(3)

$$\frac{x+4}{x-2}>0 \wedge x>0 \wedge \frac{x+4}{x-2}>x$$

$$\frac{x+4}{x-2}>0 \wedge x>0 \wedge \frac{x^2-3x-4}{x-2}<0$$

$$(x<-4 \vee x>2)\wedge(x>0)\wedge(x<-1 \vee 2<x<4)$$

En la intersección: $2<x<4$..............(4)

De (3) y (4): $cs(I)=\langle 2;4\rangle$

Finalmente tenemos:

$$cs=cs(I)\cup cs(II)$$

$$\therefore\ cs=\langle 2;4\rangle$$

***Clave:* C**

Problema 61

Sea S el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{1}{4^{2x}+4}-\frac{1}{8}\le\frac{4^x-2}{2^{4x+1}+8}$$

De esto se afirma que:

I. $\langle-\infty;0]\subset S$

II. $\left\langle-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle\cap S=\phi$

III. $S\subset\langle 0;+\infty\rangle$

¿Cuáles de estas afirmaciones son las correctas?

A) I B) II y III C) III

D) I y II E) Todas

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\frac{1}{4^{2x}+4}-\frac{1}{8}\le\frac{4^x-2}{2^{4x}\cdot 2+8}$$

$$\frac{1}{(4^x)^2+4}-\frac{1}{8}\le\frac{4^x-2}{(4^x)^2\cdot 2+8}$$

Hagamos que $4^x=m>0$, luego:

$$\frac{1}{m^2+4}-\frac{1}{8}\le\frac{m-2}{2m^2+8}$$

$$\frac{1}{m^2+4}-\frac{m-2}{2m^2+8}\le\frac{1}{8}$$

$$\frac{2-m+2}{2m^2+8}\le\frac{1}{8}$$

$$\frac{4-m}{m^2+4}\le\frac{1}{4}$$

Como: $m^2+4>0: 4(4-m)\le m^2+4$

$$16-4m\le m^2+4$$

$$-m^2-4m+12\le 0$$

$$m^2+4m-12\ge 0$$

$$(m+6)(m-2)\ge 0$$

En forma equivalente: $m\le -6 \vee m\ge 2$

Como m > 0, aceptamos: $m\ge 2$

Reponiendo la incógnita tenemos:

$$4^x\ge 2$$

$$2^{2x}\ge 2^1$$

$$2x\ge 1$$

$$x\ge\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow cs=S=\left[\frac{1}{2};\infty\right\rangle$$

$\therefore$ La afirmación correcta es III

***Clave:* C**

Problema 62

Sabiendo que a > 1, resolver

$$\text{Log}_a\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|-\text{Log}_a\left|\frac{2x+1}{-1-2x}\right|<0$$

Dar como respuesta el conjunto solución

A) $\langle -2;0\rangle-\left\{-1;-\frac{1}{3}\right\}$

B) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle$

C) $\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 0;1\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$

D) $\langle 0;+\infty\rangle$

E) $\langle -\infty;-1\rangle\cup\langle -1;1\rangle$

Resolución:

Fácilmente podemos reconocer que:

$$\left|\frac{2x+1}{-1-2x}\right|=\left|\frac{2x+1}{1+2x}\right|=1;\ x\neq-\frac{1}{2}$$

Ahora en la inecuación tenemos:

$$\log_a\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|<\log_a(1)$$

Como a > 1, se cumple que:

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|<1$$

$$\left|\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}\right|<1$$

Siendo $x\neq 1$, tenemos:

$$\left|\frac{1}{x+1}\right|<1$$

$$\frac{1}{|x+1|}<1$$

$$1<|x+1|;\ x\neq-1$$

En forma equivalente:

$$|x+1|>1$$

$$x+1>1\vee x+1<-1$$

$$x>0\vee x<-2$$

Recuerda que $x\neq 1$:

$$cs=\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 0;\infty\rangle-\{1\}$$

$$\therefore\ cs=\langle -\infty;-2\rangle\cup\langle 0;1\rangle\cup\langle 1;\infty\rangle$$

Clave: C

Problema 63

Si el conjunto solución de la inecuación $\text{Log}_3(x^2-1)<\text{Log}_3(9-x^2)$ es de la forma $\langle a,b\rangle\cup\langle c,d\rangle$, hallar $a^2+b^2+c^2+d^2$

A) 12 B) 10 C) 8

D) 6 E) 5

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\log_3(x^2-1)<\log_3(9-x^2)$$

Por teorema se cumple que:

$$x^2-1>0\wedge 9-x^2>0\wedge x^2-1<9-x^2$$

$$x^2-1>0\wedge x^2-9<0\wedge 2x^2-10<0$$

$$x^2-1>0\wedge x^2-9<0\wedge x^2-5<0$$

$$(x+1)(x-1)>0\wedge(x+3)(x-3)<0\wedge$$
$$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})<0$$

En forma equivalente:

$$(x<-1\vee x>1)\wedge(-3<x<3)\wedge(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$$

En la intersección tenemos:

$$-\sqrt{5}<x<-1\vee 1<x<\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow cs=\langle -\sqrt{5};-1\rangle\cup\langle 1;\sqrt{5}\rangle$$

Finalmente tenemos:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(-\sqrt{5})^2+(-1)^2+(1)^2+(\sqrt{5})^2$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=5+1+1+5$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2+d^2=12$$

Clave: A



Problema 64

Reducir:

$$\log_{\sqrt[5]{5}} \sqrt[\sqrt{5}]{5} + \log_{\sqrt[3]{3}} 27\sqrt{27} - 2^{\log_2 \sqrt{5}}$$

Resolución:
Llamado «E» a la expresión dada, ésta es equivalente a:

$$E = \log_{\sqrt[5]{5}} \sqrt[\sqrt{5}]{5} + \log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt{27}^3 - 2^{\log_2 \sqrt{5}}$$

Luego utilizamos convenientemente las propiedades tenemos:

$$E = \log_{\sqrt[5]{5}} (\sqrt[\sqrt{5}]{5})^5 + \log_3 (\sqrt{27^3})^3 - \sqrt{5}$$

$$E = \log_5 5^{\frac{5}{\sqrt{5}}} + \log_3 3^{\frac{27}{2}} - \sqrt{5}$$

$$E = \frac{5}{\sqrt{5}}\log_5 5 + \frac{27}{2}\log_3 3 - \sqrt{5}$$

$$E = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{27}{2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} + \frac{27}{2} - \sqrt{5}$$

Racionalizando

$$\therefore \quad E = \frac{27}{2}$$

Problema 65

El equivalente de: $\log e^{\log_{16} 64^{\ln 100}}$ es:

Resolución:
Sea «P» el equivalente de la expresión dada, luego con el auxilio de las propiedades tenemos:

$$P = \log e^{\log_{16} 64^{\ln 100}} = \log e^{\ln 100 \cdot \log_{16} 64}$$

Nótese que:

$$\log_{16} 64 = \log_{\sqrt{16}} \sqrt{4^3} = \log_4 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\log_{16} 64 = \frac{3}{2}\log_4 4 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

Es decir: $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$

$$P = \log e^{\text{Ln}100 \cdot \frac{3}{2}} = \log[e^{\ln 100}]^{\frac{3}{2}}$$

$$P = \log[100]^{\frac{3}{2}} = \log\sqrt{100}^3 = \log 10^3$$

$$P = 3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1$$

$$\therefore \; P = 3$$

Problema 66

Calcular el valor de:

$$\left[\text{Log}_3 \sqrt[2]{4} \cdot \text{Log}_2 \sqrt[3]{9}\right]^{\log_6 5}$$

Resolución:
Sea «E» el valor de la expresión, ahora se tendrá:

$$E = \left[\log_3 2 \cdot \log_2 \sqrt[3]{4^{\text{Log}_2 3}} \cdot \text{Log}_2 3 \cdot \text{Log}_3 \sqrt[2]{9^{\log_3 2}}\right]^{\log_6 5}$$

$$E = \left[\log_3 2 \cdot \log_2 \sqrt[3]{2^{2\log_2 3} \cdot 3^{2\log_3 2}}\right]^{\log_6 5}$$

Luego aplicando propiedades de logaritmo conseguimos lo siguiente:

$$E=\left[\sqrt[1]{2^{\log_2 9}\cdot 3^{\log_3 4}}\right]^{\log_6 5}=[9\cdot 4]^{\log_6 5}=[36]^{\log_6 5}=6^{2\log_6 5}$$

$$E=6^{\log_6 5^2}\quad=\quad 6^{\log_6 25}\qquad \therefore\ E=25$$

Problema 67

Efectuar la siguiente adición:

$$\frac{1+\log_5 7}{1-\log_5 7}+\frac{1+\log_7 5}{1-\log_7 5}$$

Resolución:

Sea «P» el equialente pedido, luego expresando los términos del primer sumando en función de logaritmo en base 7 se tendrá:

$$P=\frac{1+\dfrac{\log_7 7}{\log_7 5}}{1-\dfrac{\log_7 7}{\log_7 5}}+\frac{1+\log_7 5}{1-\log_7 5}=\frac{\dfrac{\log_7 5+1}{\log_7 5}}{\dfrac{\log_7 5-1}{\log_7 5}}+\frac{1+\log_7 5}{1-\log_7 5}$$

$$P=\frac{\log_7 5+1}{\log_7 5-1}+\frac{1+\log_7 5}{-(\log_7 5-1)}=\frac{\log_7 5+1}{\log_7 5-1}-\frac{\log_7 5+1}{\log_7 5-1}\qquad \therefore\ P=0$$

Problema 68

El equivalente de:

$$\frac{\log_2 4+\log_{(1/2)} 4}{\log_3 243+\log_{(1/3)} 81}\ \text{es:}$$

Resolución:

Sea «E» el equivalente, luego se tendrá:

$$\frac{\log_2 2^2+\log_{(1/2)} 2^2}{\log_3 3^5+\log_{(1/3)} 3^4}$$

Teniendo en cuenta a las propiedades conseguimos:

$$E=\frac{\log_2 2^2+\log_2 2^{-2}}{\log_3 3^5+\log_3 3^{-4}}=\frac{2\log_2 2-2\log_2 2}{5\log_3 3-4\log_3 3}=\frac{2-2}{5-4}=\frac{0}{1}\qquad \therefore\ E=0$$

Problema 69

Mostrar el equivalente de:

$$\log_3(\log_6(\log_6 12+\log_6 3)+\log_6 108)$$

Resolución:
Sea «P» el equivalente, luego tenemos:

$$P=\log_3(\log_6 \underbrace{(\log_6 12+\log_6 3)}_{\log_6 36\,=\,\log_6 6^2=2} +\log_6 108) \Leftrightarrow P=\log_3(\log_6 2+\log_6 108)=\log_3(\log_6 216)$$

$$P=\log_3(\log_6 6^3)=\log_3(3)=\log_3 3$$

$$\therefore\ E=0$$

Problema 70

Reducir la siguiente expresión:

$$N=\log_4 \sqrt[3]{32}+\log_{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}} \sqrt{3}^{\sqrt{3}}+\log_{27}\sqrt{3}$$

Resolución:
Teniendo en cuenta a las propiedades procedemos así:

$$N=\log_{\sqrt{4}}\sqrt{\sqrt[3]{32}}+\mathrm{Log}_{\left(\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt{3}}}\left(\sqrt{3}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} + \mathrm{Log}_{\sqrt[3]{27}}\sqrt[3]{\sqrt{3}}$$

$$N=\log_2\sqrt[6]{2^5}+\log_3\sqrt{3}^3+\log_3\sqrt[6]{3}$$

$$N=\log_2 2^{\frac{5}{6}}+\log_3 3^{\frac{3}{2}}+\log_3 3^{\frac{1}{6}}$$

$$N=\frac{5}{6}+\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5+9+1}{6}=\frac{15}{6} \qquad \therefore\ N=\frac{5}{2}$$

Problema 71

El equivalente de: $\log_{16}\log_{(4/9)}\log_{\sqrt{8}}\log_{\sqrt{2}} 2$ es:

Resolución:
Sea «E» el equivalente de la expresión, la cual puede escribirse así:

$$E=\log_{16}\log_{(4/9)}\log_{\sqrt{8}}\overbrace{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}^2}$$

$$E=\log_{16}\log_{(4/9)}\log_{\sqrt{8}}2$$

$$E=\log_{16}\log_{(4/9)}\log_{8}2^2$$

$$E=\log_{16}\log_{(4/9)}\log_{\sqrt[3]{8}}\sqrt[3]{2^2}$$

$$E=\log_{16}\log_{(4/9)}\overbrace{\log_{2}2^{2/3}}$$

$$E=\log_{16}\log_{(4/9)}(2/3)$$

$$E=\log_{16}\log_{\sqrt{4/9}}\sqrt{2/3}$$

$$E=\log_{16}\log_{(2/3)}(2/3)^{1/2}=\log_{16}(1/2)$$

$$E=\log_{\sqrt[4]{16}}\sqrt[4]{2^{-1}}=\log_2 2^{-1/4}$$

$$\therefore\ E=-\frac{1}{4}$$

Problema 72

Halle el antilogarítmo de N siendo:

$$N=\frac{1}{2}(2\log a+\log b-3\log c)\ ;\ \{a,b,c\}\subset\mathbb{R}^+$$

Resolución:

Hallemos un equivalente más simple para N con el auxilio de algunas propiedades del logaritmo:

$$N=\frac{1}{2}(\log a^2+\log b-\log c^3)$$

$$N=\frac{1}{2}(\log(a^2b)-\log c^3)$$

$$N=\frac{1}{2}\log\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)=\log\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$N=\log\sqrt{\frac{a^2b}{c^3}}=\log\left(\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$$

Ahora tomamos antilogaritmo a cada miembro de la manera siguiente:

$$\text{antilog}\,N=\text{antilog}\left[\log\left(\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{c}}\right)\right]$$

$$\therefore\ \text{antilog}\,N=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{c}}$$

Problema 73

Sabiendo que:

$$\log_a\sqrt[5]{\left[a\left(2-\sqrt{3}\right)^2\right]^2}=\frac{1}{2}\quad\text{....(1)}$$

$$\log_a\sqrt{\left[a\left(2+\sqrt{3}\right)\right]^5}=x\quad\text{....(2)}$$

Con a > 1 ¿Cuál es el valor de «x»?

Resolución:

Teniendo en cuenta la definición y las propiedades del logaritmo tenemos:

De (1):

$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[5]{a^2\left(2-\sqrt{3}\right)^4}$$

$$a^{\frac{5}{2}}=a^2\left(2-\sqrt{3}\right)^4$$

$$a^{\frac{5}{2}-2}=(2-\sqrt{3})^4$$

$$a^{\frac{1}{2}}=(2-\sqrt{3})^4$$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{8}}=2-\sqrt{3}\text{..........}(\alpha)$$

De (2):

$$a^x=\sqrt{\left[a\left(2+\sqrt{3}\right)\right]^5}$$

$$\Rightarrow\ a^{2x} = \left[a\left(2+\sqrt{3}\right)\right]^5$$

$$a^{\frac{2x}{5}} = a\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow\ a^{\frac{2x}{5}-1} = 2+\sqrt{3} \qquad ....(\beta)$$

Multipliquemos (α) y (β) miembro a miembro:

$$a^{\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{2x}{5}-1} = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$a^{\frac{1}{8}+\frac{2x}{5}-1} = 2^2 - \sqrt{3}^2 \Rightarrow a^{\frac{2x}{5}-\frac{7}{8}} = 1$$

Por definición:

$$\frac{2x}{5} - \frac{7}{8} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{7}{8}$$

$$\therefore\ x = \frac{35}{16}$$

Problema 74

Resolver la siguiente ecuación:

$$1 + 2\log x - \log(7x+12) = 0$$

Resolución:

Por condición de existencia se plantea:

$$x > 0 \wedge 7x + 12 > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x > -\frac{12}{7}$$

Es decir: $x > 0$ ....(1)

La ecuación dada equivale a:

$$\log 10 + \log x^2 = \log(7x+12)$$

$$\log(10x^2) = \log(7x+12)$$

De donde:

$$10x^2 = 7x + 12$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 7x - 12 = 0$$

$$(5x+4)(2x-3) = 0 \begin{cases} x = -4/5 \\ x = \ \ 3/2 \end{cases} \quad ....(2)$$

Finalmente de (1) y (2), se descarta

$x = -4/5$

$$\therefore\ CS = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Problema 75

Hallar «x» de la igualdad:

$$\log_{2x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \log_{\left(\frac{1}{x}\right)}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Resolución:

Teniendo en cuenta a la existencia de la expresión logarítmica y a la propiedad del producto unitario:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

La igualdad dada es:

$$\log_{\left(x+\frac{1}{x}\right)} 2x = \log_{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Luego se cumple:

$$2x = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ 2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema 76

Resolver:

$$\log\sqrt{x+14} + \log\sqrt{x+7} - \log 1{,}2 = 1$$

Resolución:
Teniendo en cuenta a la existencia de la expresión logarítmica procedemos a resolver la ecuación con el auxilio de las propiedades:

$$\log\sqrt{x+14}+\log\sqrt{x+7}=\log 1{,}2+\log 10$$

$$\log\left(\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x+7}\right)=\log 12$$

$$\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x+7}=12 \quad \text{... al cuadrado}$$

$$(x+14)(x+7)=144$$

$$x^2+21x+98=144$$

$$x^2+21x-46=0$$

$$(x-2)(x+23)=0 \;\begin{cases} x=2 \\ x=-23 \end{cases}$$

Finalmente verificando en la ecuación original descartamos: $x=-23$

$$\therefore\ cs=\{2\}$$

Problema 77
Encontrar el valor de «x» que satisface

$$\frac{\log\left(\sqrt{x^3}+19\right)}{\log\left(\sqrt{x}+1\right)}=3$$

Resolución:
La ecuación dada equivale a:

$$\log\left(\sqrt{x^3}+19\right)=3\log\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$\log\left(\sqrt{x^3}+19\right)=\log\left(\sqrt{x}+1\right)^3$$

Luego planteamos:

$$\sqrt{x}^3+19=\left(\sqrt{x}+1\right)^3$$

Es decir:

$$\sqrt{x}^3+19=\sqrt{x}^3+3\sqrt{x}^2+3\sqrt{x}+1$$

$$3\sqrt{x}^2+3\sqrt{x}-18=0$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{x}^2+\sqrt{x}-6=0$$

$$\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=0 \;\begin{cases} \sqrt{x}=-3 & \text{....!No¡} \\ \sqrt{x}=2 & \text{....!único¡} \end{cases}$$

$$\therefore\ x=4$$

Problema 78
Hallar el mayor valor de «x» que verifica la igualdad.

$$5^{\log_{11}\left(x^2-7x+21\right)}=3^{\log_{11}25}$$

Resolución:
Teniendo en cuenta a una de las propiedades diversas. La igualdad mostrada es:

$$5^{\log_{11}\left(x^2-7x+21\right)}=25^{\log_{11}3}$$

$$5^{\log_{11}\left(x^2-7x+21\right)}=5^{2\log_{11}3}=5^{\log_{11}9}$$

Por comparación:

$$x^2-7x+21=9$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$(x-4)(x-3)=0 \;\begin{cases} x=4 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\therefore\ \text{Mayor valor de } x=4$$

Problema 79
Resolver:

$$\frac{\log_3 x+1}{\log_x 3+1}=5$$

Resolución:
Teniendo en cuenta la existencia de la expresión logarítmica y a sus propiedades, la ecuación dada equivale a:

$$\frac{\log_3 x+1}{\frac{1}{\log_3 x}+1}=5$$

$$\frac{(\log_3 x+1)\log_3 x}{1+\log_3 x}=5 \Leftrightarrow \log_3 x=5$$

$$3^5=x \Leftrightarrow x=243$$

$$\therefore\ CS=\{243\}$$

Problema 80

Calcular el producto de la raíces de la siguiente ecuación:

$$\frac{100^{\log x}+1}{10^{\log_{100} x^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Resolución:

Por existencia de la expresión logarítmica notamos que: $x>0$

La ecuación es: $\dfrac{10^{2\log x}+1}{10^{\log_{100} x^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Por propiedad:

$$\frac{10^{\log x^2}+1}{10^{\log x}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}=\frac{16}{3}$$

En aspa: $3x^4+6x^2+3=16x^2$

$$3x^4-10x^2+3=0$$

$$\Rightarrow (3x^2-1)(x^2-3)=0$$

$\star$ $3x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\star$ $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$

$$\Rightarrow x_2=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ x_1\cdot x_2=1$$

Problema 81

Si: $a>1$ Qué valores asume «x» en:

$$(\log_x ax^2)(\log_a a^2x)=\log_{(1/a)} a^{-10}$$

Resolución:

La igualdad mostrada es:

$$(\log_x a+\log_x x^2)(\log_a a^2+\log_a x)=\log_a a^{10}$$

$$(\log_x a+2)(2+\log_a x)=10$$

$$\left(\frac{1}{\log_a x}+2\right)(2+\log_a x)=10$$

$$(1+2\log_a x)(2+\log_a x)=10\log_a x$$

$$2+5\log_a x+2(\log_a x)^2=10\log_a x$$

$$2(\log_a x)^2-5(\log_a x)+2=0$$

$$(2\log_a x-1)(\log_a x-2)=0$$

$\star$ $2\log_a x-1=0 \Rightarrow \log_a x=\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad x=\sqrt{a}$$

$\star$ $\log_a x-2=0 \Rightarrow \log_a x=2$

$$\Rightarrow \quad x=a^2$$

$$\therefore\ CS=\left\{\sqrt{a};a^2\right\}$$

Problema 82

Resolver la siguiente ecuación:

$$x^{\log x}=\left(\frac{10^3}{x}\right)^4$$

Resolución:
La ecuación dada puede ser escrita del modo siguiente:

$$x^{\log x} = \frac{10^{12}}{x^4}$$

Tomando logarítmo decimal a ambos miembros conseguimos:

$$\log x^{\log x} = \log\left(\frac{10^2}{x^4}\right)$$

Por propiedad:

$$\log x \cdot \log x = \log 10^{12} - \log x^4$$

$$(\log x)^2 = 12 - 4\log x$$

$$(\log x)^2 + 4(\log x) - 12 = 0$$

$$(\log x + 6)(\log x - 2) = 0$$

* $\log x + 6 = 0$

$$\log x = -6$$

$$x = 10^{-6}$$

* $\log x - 2 = 0$

$$\log x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$\therefore\ CS = \left\{10^{-6} ; 10^2\right\}$$

Problema 83
Qué valor de «x» verifica:

$$\log_a \log_{a^a} x + \log_{a^a} x . \log_a x = a$$

Resolución:
Transformando el segundo término del primer miembro de la ecuación tenemos:

$$\log_a \log_{a^a} x + \log_{a^a} x . \log_{a^a} x^a = a$$

$$\Rightarrow\ \log_a \log_{a^a} x + a\left(\log_{a^a} x\right)^2 = a$$

Hagamos:

$$\log_{a^a} x = m \qquad ....(1)$$

Ahora tenemos:

$$\log_a m + am^2 = a \Rightarrow \log_a m = a - am^2$$

$$a^{a-am^2} = m \Leftrightarrow\ a^a = ma^{am^2}$$

Elevamos al cuadrado: $a^{2a} = m^2 a^{2am^2}$

Dando forma: $1^2\left(a^{2a}\right)^{1^2} = m^2\left(a^{2a}\right)^{m^2}$

Por comparación:

$$m^2 = 1^2 \Rightarrow m = 1 \qquad ....(2)$$

Finalmente de (2) y (1): $\log_{a^a} x = 1$

$$\therefore\ x = a^a$$

Problema 84
Resolver: $e^{Ln x} + e^{Ln(1/x)} = Ln e^2$

Resolución:
Recuerda que Ln nos indica que el logaritmo esta en base «e»luego la igualdad mostrda es:

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

Efectuando: $x^2 + 1 = 2x$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Finalmente tenemos: $(x-1)^2 = 0$

$$\therefore\ x = 1$$

Problema 85
Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 & ....(1) \\ \log x + \log y = 2 & ....(2) \end{cases}$$

Proporcionar el equivalente de:

$$\log_{2\sqrt{y}} \sqrt{x}$$

Considere: x > y



Resolución:
De la ecuación (2) con el auxilio de las propiedades para logarítmos, tenemos:

$\log(xy)=2\Rightarrow 10^2=xy\Rightarrow xy=100$

De donde: $y=\dfrac{100}{x}$ ....(3)

Reemplazando (3) en (1)

$$x^2+\left(\frac{100}{x}\right)^2=425$$

$\Rightarrow x^4-425x^2+100^2=0$

Factorizando tenemos:

$$(x^2-400)(x^2-25)=0$$

* $x^2-400=0\Rightarrow x^2=400$
  $\Rightarrow\ x=20$

* $x^2-25=0\Rightarrow x^2=25$
  $\Rightarrow\ x=5$

De (3):

Si $x=20\Rightarrow y=5$

Si $x=5\Rightarrow y=20$

Se pide:

$$E=\log_{2\sqrt{y}}\sqrt{x}\Leftrightarrow x>y$$

Luego escogemos:

$$x=20\wedge y=5$$

$E=\log_{2\sqrt{5}}\sqrt{20}=\log_{\sqrt{20}}\sqrt{20}$

$$\therefore\ E=1$$

Problema 86

Resolver: $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$

Resolución:
Teniendo en cuenta a la existencia de la expresión logarítmica procedemos a resolver la ecuación con el auxilio de las propiedades:

$$\sqrt{x}^{\log\sqrt{x}}=10$$

Tomando logaritmo decimal:

$$\log\sqrt{x}^{\log\sqrt{x}}=\log 10$$

$$\log\sqrt{x}\cdot\log\sqrt{x}=1$$

$\Rightarrow(\log\sqrt{x})^2=1$, de donde:

$\log\sqrt{x}=1\ \vee\ \log\sqrt{x}=-1$

$\sqrt{x}=10\ \vee\ \sqrt{x}=10^{-1}$

$x=100\ \vee\ x=\dfrac{1}{100}$

$\therefore\ CS=\left\{100;\dfrac{1}{100}\right\}$

Problema 87

Resolver la siguiente ecuación:

$\log_2\cos(2x)-\log_2(\operatorname{sen}x)=1+\log_2(\cos x)$

Resolución:
Por existencia de la expresión logarítmica se debe cumplir:

$$\operatorname{Cos}2x>0\wedge\operatorname{Sen}x>0\wedge\operatorname{Cos}x>0$$

De donde se deduce que:

$(2x)\in\text{IC}$, es decir: $0<2x<\dfrac{\pi}{2}$

«En el IC seno y coseno son positivos»

Notar también que si:

$0<2x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<x<\dfrac{\pi}{4}$ ....(1)

Ahora en la ecuación dada:

$\log_2(\cos 2x)-\log_2(\operatorname{sen}x)$

$=\log_2 2+\log_2(\cos x)$

$$\log_2\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}x}\right)=\log_2(2\cos x)$$



Luego:

$$\frac{\cos 2x}{\text{sen}x} = 2\cos x$$

$\Rightarrow \quad \cos 2x = 2\text{sen}\,x \cdot \cos x$

Es decir:

$$\cos 2x = \text{sen}2x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{sen}2x}{\cos 2x} = 1$$

$$\text{tang } 2x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8}$$

El valor encontrado par x verifica (1)

$$\therefore \; CS = \left\{\frac{\pi}{8}\right\}$$

Problema 88

Hallar el dominio de la función cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$F(x) = \log\left(\frac{x^2 + x - 12}{3x - 4}\right)$$

Resolución:

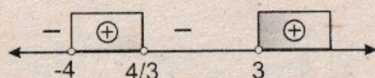
Para afrontar problemas de este tipo, bastará hacer cumplir la condición de existencia de la expresión logarítmica, veamos:

$$\frac{x^2 + x - 12}{3x - 4} > 0$$

Factorizando:

$$\frac{(x+4)(x-3)}{(3x-4)} > 0$$

En la recta:



Recuerda que el dominio de F(x) viene dado por los valores que asume «x»

$$\therefore \; \text{Dom}(F) = x \in \langle -4; 4/3 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$$

Problema 89

Esbozar la gráfica de la función cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$F(x) = -\log(-x-3)$$

Resolución:

Para resolver este problema procedemos de la manera siguiente:

* Hallemos el dominio:

$$-x - 3 > 0 \;\Rightarrow\; x < -3$$

* Intersección de F(x) con el eje «x».
Se hace F(x) = 0

$$-\log(-x-3) = 0$$
$$-x - 3 = 1$$
$$x = -4$$

Luego la gráfica de la función corta al eje «x» en el punto (– 4 ; 0)

* Intersección de F(x) con el eje «y».
Se hace x = 0

y = – log(0 – 3) = – log(–3) ¡No existe!.

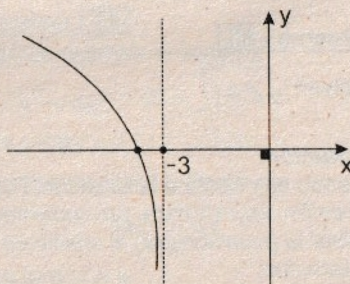
Asi notamos que la gráfica de la función no corta al eje y.

* Hallemos la asíntota de la gráfica:

$-x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ asíntota vertical

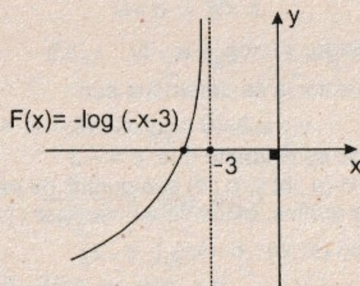
Finalmente la gráfica de la función es:

$$G(x) = \log(-x-3)$$





Se pide: $F(x) = -G(x) = -\log(-x-3)$

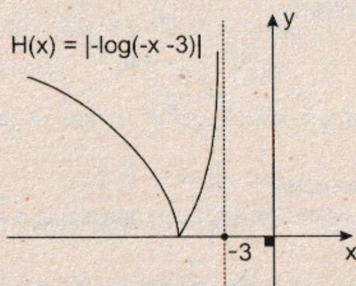


Problema 90

Con respecto al problema anterior. ¿Cuál será la gráfica de $|F(x)|$?

Resolución:

Considerando como dato la gráfica del problema anterior es fácil deducir que para graficar $|F(x)|$ es suficiente reflejar en el eje x la parte de la gráfica F(x) que se encuentra por debajo del mencionado eje, veamos:



Problema 91

Calcular el área de la región que describen en el plano Gausseano los números complejos Z que verifican la desigualdad.

$$\text{Log}_{\sqrt{3}}\left(\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}\right) \le 2$$

Resolución:

La desigualdad mostrada equivale a:

$$\text{Log}_{\sqrt{3}}\left(\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}\right) \le \text{Log}_{\sqrt{3}}\sqrt{3}^2$$

Luego se cumple:

$$\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|} \le \sqrt{3}^2$$

$$\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|} - 3 \le 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|z|^2-4|z|-5}{2+|z|} \le 0$$

Como: $2+|z|>0 \quad \forall z \subset C$

Luego: $|z|^2-4|z|-5 \le 0$

$$(|z|-5)(|z|+1) \le 0$$

Como: $|z|+1>0 \quad \forall z \subset C$

Luego:

$|z|-5 \le 0 \rightarrow |z| \le 5 \qquad ....(1)$

Sea el complejo:

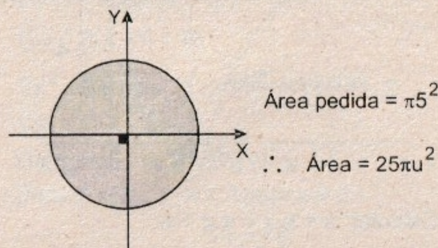
$$z = x + yi / \{x; y\} \subset \mathbb{R}$$

Sabemos que: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Ahora en (1): $\sqrt{x^2+y^2} \le 5$

Al cuadrado: $x^2+y^2 \le 5^2$

Graficando:

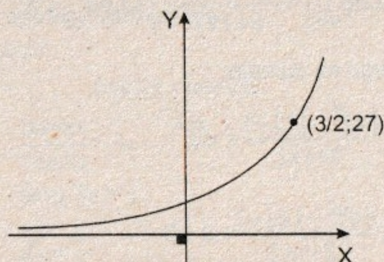


Área pedida = $\pi 5^2$

$\therefore$ Área = $25\pi u^2$

Problema 92

A partir de la gráfica de cierta función exponencial.



Halle su regla de correspondencia.

Resolución:

La regla de correspondencia de la función exponencial es de la forma:

$$y = F(x) = b^x \ ; b > 0 \wedge b \neq 1$$

Como: $(3/2 \ ; 27) \in F$ se tendrá:

$$27 = b^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{27}^{2} = b$$

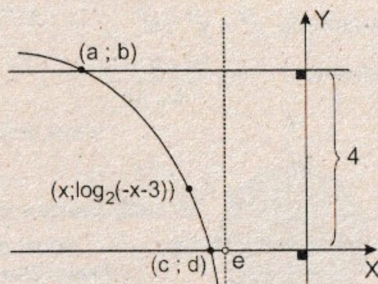
$$\Rightarrow b = 9$$

Finalmente la regla de correspondencia de la función es:

$$\therefore \ y = F(x) = 9^x$$

Problema 93

A partir del gráfico:



Calcular: a + b + c + d + e

Resolución:

De la gráfica fácilmente deducimos que:

$$b = 4 \wedge d = 0$$

También: $y = \log_2(-x-3)$ ....(1)

La asintonia se determina así:

$$-x-3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Luego es evidente que: $e = -3$

Como (a ; b) y (c ; d) son puntos de paso de la gráfica, estos deben verificar (1)

* Con (a ; b) : $b = \log_2(-a-3)$

$$4 = \log_2(-a-3)$$

$$-a-3 = 16 \Rightarrow a = -19$$

* Con (c ; d) : $d = \log_2(-c-3)$

$$0 = \log_2(-c-3)$$

$$-c-3 = 1 \Rightarrow c = -4$$

En consecuencia $a = -19$; $b = 4$; $c = -4$; $d = 0 \wedge e = -3$

$$\therefore \ a+b+c+d+e = -22$$

Problema 94

Resolver:

$$2^{\log_x\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(\frac{2^7}{x^6}\right)^{\log_x 2} \geq x$$

Resolución:

La inecuación dada es equivalente a ésta otra:

$$\frac{2^{\log_x\left(\frac{2}{x}\right)} \ . \ 2^{7\log_x 2}}{x^{6\log_x 2}} \geq x$$

Teniendo en cuenta que:

$$x > 0 \wedge x \neq 1 \qquad ....(1)$$

$$\frac{2^{\log_x 2 - \log_x x + 7\log_x 2}}{x^{\log_x 2^6}} \geq x$$



$$\frac{2^{8\log_x 2-1}}{2^6} \geq x$$

$$2^{8\log_x 2-7} \geq 2^{\log_2 x}$$

Se cumple: $8\log_x 2 - 7 \geq \log_2 x$

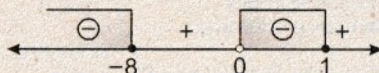
$$\frac{8}{\log_2 x} - 7 - \log_2 x \geq 0$$

$$\frac{8 - 7\log_2 x - (\log_2 x)^2}{\log_2 x} \geq 0$$

$$\frac{(\log_2 x)^2 + 7(\log_2 x) - 8}{\log_2 x} \leq 0$$

$$\frac{(\log_2 x - 1)(\log_2 x + 8)}{\log_2 x} \leq 0$$

En la recta:



Luego: $\log_2 x \leq -8 \ \vee \ 0 < \log_2 x \leq 1$

Es decir:

$$\log_2 x \leq \log_2 2^{-8} \vee \log_2 1 < \log_2 x \leq \log_2 2$$

$$x \leq 2^{-8} \ \vee \ 1 < x \leq 2$$

$$x \leq 1/256 \ \vee \ 1 < x \leq 2 \qquad ....(2)$$

Finalmente de (1) y (2) tenemos:

$$\therefore \ 0 < x \leq \frac{1}{256} \vee 1 < x \leq 2$$

Problema 95

Que valor de «x» verifica:

$$\log_2 x + \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x^2 = \frac{15}{2}$$

Resolución:

Teniendo e cuentaque x > 0 aplicamos propiedad de logaritmos.

$$\log_{16} x^4 + \log_{16} x + \log_{16} x^2 + \log_{16} x^8 = \frac{15}{2}$$

$$4\log_{16} x + \log_{16} x + 2\log_{16} x + 8\log_{16} x = \frac{15}{2}$$

$$15\log_{16} x = \frac{15}{2}$$

$$\log_{16} x = \frac{1}{2}$$

$$16^{\frac{1}{2}} = x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{16} = x$$

$$\therefore \ x = 4$$

Problema 96

Resolver:

$$\log(2x-1)^n + \log(x-1)^{10^{\log n}} = n$$

Considere $n > 2016$

Resolución:

La ecuación dada es equivalente a esta otra:

$\log(2x-1)^n + \log(x-1)^n = n$

$n\log(2x-1) + n\log(x-1) = n$

$\log(2x-1) + \log(x-1) = 1 \qquad ....(1)$

Teniendo en cuenta que:

$$2x-1>0 \ \wedge \ x-1>0$$

$$x > \frac{1}{2} \ \wedge \ x > 1$$

Es decir: $x > 1$ ....(2)

De (1): $\log[(2x-1)(x-1)] = 1$

$(2x-1)(x-1) = 10$

$2x^2 - 3x + 1 = 10 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$(2x+3)(x-3) = 0$

De donde: $x = -3/2 \ \vee \ x = 3$

Pero de (2) $x > 1$, luego $x = 3$

$$\therefore \ CS = \{3\}$$

Problema 97

Proporcionar los valores de «x» que satisfacen:

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$$

Resolución:

La ecuación dada puede escribirse del modo siguiente:

$$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2 2^2+\log_2(3^{x-1}+1)$$

$$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2[4(3^{x-1}+1)]$$

De donde: $9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)$

$$(3^{x-1})^2+7=4(3^{x-1})+4$$

$$(3^{x-1})^2-4(3^{x-1})+3=0$$

$$(3^{x-1}-3)(3^{x-1}-1)=0$$

Es decir:

$$3^{x-1}-3=0 \ \vee \ 3^{x-1}-1=0$$

$$3^{x-1}=3 \ \vee \ 3^{x-1}=1$$

$$x-1=1 \ \vee \ x-1=0$$

$$x=2 \ \vee \ x=1$$

$$\therefore \ CS=\{1;2\}$$

Problema 98

Si: $\log_a 3=\log_b 2 \wedge ab=10$

Calcular: «b»

Resolución:

Utilizando adecuadamente cada dato tenemos:

* $$\log_a 3=\log_b 2$$

$$\frac{\log 3}{\log a}=\frac{\log 2}{\log b}$$

$$\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{\log a}{\log b}$$

$$\frac{\log 3+\log 2}{\log 2}=\frac{\log a+\text{Log}\, b}{\log b}$$

$$\frac{\log(3\cdot 2)}{\log 2}=\frac{\log(a\cdot b)}{\log b}$$

$$\frac{\log 6}{\log 2}=\frac{\log 10}{\log b}$$

$$\frac{\log 6}{\log 2}=\frac{1}{\log b}$$

$$\log b=\frac{\log 2}{\log 6}$$

$$b=10^{\frac{\log 2}{\log 6}}$$

$$b=\sqrt[\log 6]{10^{\log 2}}$$

$$\therefore \ b=\sqrt[\log 6]{2}$$

Problema 99

Resolver el sistema:

$$\log^2(x\cdot y)-\log^2(x/y)=8 \quad ....(1)$$

$$2^{\log x}=4^{\log y} \quad ....(2)$$

Resolución:

La ecuación (2) es equivalente a esta otra:

$$2^{\log x}=2^{2\log y}=2^{\log y^2}$$

De donde: $\log x=\log y^2$

$$x=y^2 \quad ....(3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$\log^2(y^3)-\log^2(y)=8$$

$$[3\log y]^2-[\log y]^2=8$$

$$9(\log y)^2-(\log y)^2=8$$



$$8(\log y)^2 = 8$$

$$\Rightarrow (\log y)^2 = 1$$

De donde: $\log y = 1 \vee \log y = -1$

Es decir: $y = 10 \vee y = \dfrac{1}{10}$ ....(4)

De (3) y (4) conseguimos:

Si $y = 10 \Rightarrow x = 100$

Si $y = \dfrac{1}{10} \Rightarrow x = \dfrac{1}{100}$

$$\therefore CS = \left\{(100\,;\,10);\left(\frac{1}{100};\frac{1}{10}\right)\right\}$$

Problema 100

Cuántas cifras tiene el resultado de efectuar:

$5^{40} \cdot 2^{80}$

Resolución:

Sea «E» el número que se obtiene al efectuar la multiplicación indicada, es decir:

$E = 5^{40} \cdot 2^{80}$

Tomando logaritmo decimal a cada miembro se consigue:

$\log E = \log(5^{40} \cdot 2^{80})$

$\log E = \log 5^{40} + \log 2^{80}$

$\log E = 40\log 5 + 80\log 2$ ....(1)

Recuerda que:

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2$$

Es decir:

$\log 5 = 1 - \log 2$ ....(2)

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$\log E = 40 - 40\log 2 + 80\log 2$

$\log E = 40 + 40\log 2$

$\log E = 40 + 40(0,30103)$

$\log E = 52,0412$

Notar que: característica = 52

Sabemos que:

N° de cfs de E = característica + 1

Finalmente: N° de cfs de E = 52 + 1

$\therefore$ N° de cfs de E = 53

Problema 101

Considerando: $\log 2 = 0,30103$

Calcular el valor de: $\sqrt[4]{781,25}$

Resolución:

Sea «E» el valor pedido, luego se tiene:

$$E = \log\sqrt[4]{781,25} = \log\sqrt[4]{\frac{78125}{100}} = \log\left(\frac{78125}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$E = \frac{1}{4}\log\left(\frac{78125}{100}\right) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{5^7}{5^2 \cdot 2^2}\right) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{5^5}{2^2}\right)$$

$$E = \frac{1}{4}\left(\log 5^5 - \log 2^2\right) = \frac{1}{4}(5\log 5 - 2\log 2)$$

$$E = \frac{1}{4}\left[5\log\left(\frac{10}{2}\right) - 2\log 2\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[5(\log 10 - \log 2) - 2\log 2\right]$$

$$E = \frac{1}{4}(5 - 7\log 2) = \frac{1}{4}(5 - 7 \cdot 0,30103)$$

$$E = \frac{1}{4}(5 - 2,10721) = \frac{1}{4}(2,89279)$$

$$\therefore E = 0,7231975$$

Problema 102

Cuántos ceros a partir de la coma decimal tiene la siguiente potencia $(0,5)^{70}$?

Resolución:

Designemos con «N» a la potencia, es decir $N=(0,5)^{70}$ tomando logaritmo decimal.

$\log N=\log(0,5)^{70}=70\log(5\cdot 10^{-1})$

$\log N=70(\log 5+\log 10^{-1})$

$\log N=70(\log 10-\log 2-\log 10)$

$\log N=70(-\log 2)=70(-0,30103)$

$\log N=-21,0721$

Ahora hallemos su característica del modo siguiente:

$$\log N=-21-0,0721+1-1$$

$$\log N=-21-1+1-0,0721$$

$\log N = -22 + 0,9279$

(0,9279 → Mantisa; −22 → Característica)

Por teoría $|-22|=22$ es la cantidad de ceros que tiene el número «N» a la izquierda de su primera cifra significativa, considerando al cero que esta delante de la coma decimal, en el problema no debemos considerar a éste último cero.

$\therefore$ Rpta : 21

Problema 103

Las estrellas se clasifican de acuerdo a categorias de brillo «m» llamadas magnitudes y flujo luminoso «L». A las estrellas más débiles (con flujo luminoso L_o) se les asigna magnitud 6. La relación entre la magnitud de brillo «m» y el flujo luminoso «L» esta dada por la fórmula:

$$m=K_0-\frac{5}{2}\log\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

Calcular «m» si: $L=10^{0,8}L_0$

Resolución:

De acuerdo con el enunciado, podemos hallar la cte «K_0» teniendo en cuenta los datos para las estrellas más débiles, veamos:

$$6=K_0-\frac{5}{2}\log(1)\left(\frac{L_0}{L_0}\right)$$

$$6=K_0-\frac{5}{2}\log(1)=L_0-\frac{5}{2}\cdot 0$$

$$K_o=6$$

Ahora hallemos «m» cuando $L=10^{0,8}L_0$

$$m=6-\frac{5}{2}\log\left(\frac{10^{0,8}L_0}{L_0}\right)$$

$$m=6-\frac{5}{2}\log 10^{\frac{4}{5}}=6-\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}$$

$$m=6-2$$

$$\therefore\ m=4$$

Problema 104

El equivalente de:

$$\frac{\left(e^x+e^y+e^z\right)(x+y+z)}{e^{Ln(z-y)}+e^{Ln(z-x)}+e^{Ln(x+y)}}$$

Siendo:

$x=Ln3$; $y=Ln5\ \wedge\ z=Ln15$ es:

Resolución:

Sea «E» el equivalente, luego se tendrá:

$$E=\frac{(e^x+e^y+e^z)(x+y+z)}{(z-y)+(z-x)+(x+y)}$$

$$E=\frac{(e^x+e^y+e^z)(x+y+z)}{2z}$$



Por dato: $x = Ln3 \Rightarrow e^x = 3$

$y = Ln5 \Rightarrow e^y = 5$

$z = Ln15 \Rightarrow e^z = 15$

Ahora tenemos:

$$E = \frac{(3+5+15)(Ln3+Ln5+Ln15)}{2Ln15} = \frac{(23)(Ln15^2)}{2Ln15}$$

$$E = \frac{(23)\cdot 2(Ln15)}{2Ln15}$$

$$\therefore\ E = 23$$

Problema 105

Se contrata un obrero para cavar en busca de fósiles, al que se le promete pagar «m» soles por el primer fósil encontrado, y por cada nuevo fósil que encuentre se le pagará el doble de lo que se le pagó por el anterior. ¿Cuántos fósiles encontró sabiendo que en total recibió «n» soles?

Resolución:

Sea «x» el total de fósiles que encontró el obrero, luego se plantea:

1° fósil, recibe: $m = m$

2° fósil, recibe: $2m = 2m$

3° fósil, recibe: $4m = 2^2m$

4° fósil, recibe: $8m = 2^3m$

⋮

x° fósil, recibe ..... $= 2^{x-1}m$

Ahora como recibe en total «n» soles se debe cumplir:

$$m + 2m + 2^2m + 2^3m + \ldots\ldots + 2^{x-1}m = n$$

$$n = m(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{x-1})$$

$$n = m\left(\frac{1-2^x}{1-2}\right) = m\left(\frac{2^x-1}{2-1}\right) = m(2^x-1)$$

Es decir: $n = m(2^x - 1)$

$$\Rightarrow\quad 2^x - 1 = \frac{n}{m}$$

$$\Rightarrow\quad 2^x = \frac{n}{m} + 1$$

$$\Rightarrow\quad 2^x = \frac{n+m}{m}$$

Tomando logaritmo en base dos:

$$\log_2 2^x = \log_2\left(\frac{n+m}{m}\right) \Leftrightarrow x\cdot\log_2 2 = \log_2\left(\frac{n+m}{m}\right)$$

$$\therefore\ x = \log_2\left(\frac{n+m}{m}\right)$$

Problema 106

Resolver:

$$\log_x\left[\frac{Lnx-e}{Lnx+e}\right]^{\log x} = Ln\left[\frac{1}{e}\right]$$

Resolución:

Teniendo en cuenta a las propiedades tenemos:

$$\log x\cdot\log_x\left[\frac{Lnx-e}{Lnx+e}\right] = Lne^{-1} = -1\cdot Lne$$

De lo indicado:

$$\log x\cdot Log_x\left[\frac{Lnx-e}{Lnx+e}\right] = -1 \ldots\text{(pues } Lne = 1)$$

$$\log_x\left[\frac{Lnx-e}{Lnx+e}\right] = -\frac{1}{\log x} = -\log_x 10$$

$$\log_x\left[\frac{Lnx-e}{Lnx+e}\right] = \log_x 10^{-1} = \log_x\left[\frac{1}{10}\right]$$

De lo indicado:

$$\frac{Lnx-e}{Lnx+e}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow 10Lnx-10e=Lnx+e$$

$$9Lnx=11e$$

$$Lnx=\frac{11e}{9}$$

Por definición: $$e^{\frac{11}{9}e}=x$$

$$\therefore\ x=\sqrt[9]{e}^{\,11e}$$

Problema 107

Resolver:
$$\log_3|3-4x|>2$$

Resolución:

La inecuación dada es:

$$\log_3|3-4x|>\log_3 3^2$$

Ahora se cumple:

$$\log_3|3-4x|>\log_3 9$$

$$\underbrace{|3-4x|>0}\wedge|3-4x|>9$$

$$x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{4}\right\}$$

Luego debemos resolver: $|3-4x|>9$

Teniendo en cuenta que: $x\neq\frac{3}{4}$:

$$|3-4x|>9\Leftrightarrow 3-4x>9\vee 3-4x<9$$

$$-4x>6\vee -4x<-12\rightarrow x<-\frac{3}{4}\vee x>3$$

Finalmente: $\therefore\ x\in\left\langle-\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle 3;\infty\rangle$

Problema 108

Mostrar el equivalente de:

$$\left[\frac{\sqrt[n]{\log 2}+\sqrt[n]{\log 3}+\sqrt[n]{\log 4}+\dots\dots+\sqrt[n]{\log N}}{\sqrt[n]{Ln2}+\sqrt[n]{Ln3}+\sqrt[n]{Ln4}+\dots\dots\dots+\sqrt[n]{LnN}}\right]$$

Resolución:

Sea «E» el equivalente de la expresión, luego la extrategia a emplear en este ejercicio es la de expresar todo logaritmo en base diez, veamos:

$$\sqrt[n]{Ln2}=\sqrt[n]{\frac{\log 2}{\log e}}=\frac{\sqrt[n]{Log2}}{\sqrt[n]{Loge}}$$

$$\sqrt[n]{Ln3}=\sqrt[n]{\frac{\log 3}{\log e}}=\frac{\sqrt[n]{Log3}}{\sqrt[n]{Loge}}$$

$$\sqrt[n]{Ln4}=\sqrt[n]{\frac{\log 4}{\log e}}=\frac{\sqrt[n]{\log 4}}{\sqrt[n]{\log e}}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{LnN}=\sqrt[n]{\frac{\log N}{\log e}}=\frac{\sqrt[n]{\log N}}{\sqrt[n]{\log e}}$$

Sumando miembro a miembro tenemos:

$$\sqrt[n]{Ln2}+\sqrt[n]{Ln3}+\sqrt[n]{Ln4}+\dots\dots+\sqrt[n]{LnN}=$$

$$=\frac{\sqrt[n]{Log2}}{\sqrt[n]{Loge}}+\frac{\sqrt[n]{Log3}}{\sqrt[n]{Loge}}+\frac{\sqrt[n]{Log4}}{\sqrt[n]{Loge}}+\dots\dots+\frac{\sqrt[n]{LogN}}{\sqrt[n]{Loge}}$$

$$=\frac{\sqrt[n]{Log2}+\sqrt[n]{Log3}+\sqrt[n]{Log4}+\dots\dots+\sqrt[n]{LnN}}{\sqrt[n]{\log e}}$$

Ahora la expresión pedida se transforma en:

$$E=\left[\frac{\sqrt[n]{\log 2}+\sqrt[n]{\log 3}+\sqrt[n]{\log 4}+\dots+\sqrt[n]{\log N}}{\frac{\sqrt[n]{\log 2}+\sqrt[n]{\log 3}+\sqrt[n]{\log 4}\dots+\sqrt[n]{\log N}}{\sqrt[n]{\log e}}}\right]^n$$

$$E=\left[\sqrt[n]{\log e}\right]^n$$

$$\therefore\ E=\log e$$

Problema 109

Resolver: $e^{3x}-2e^{2x}-2e^{x}-3=0$



Resolución:
La ecuación dada es:

$$e^{3x}-1-2e^{2x}-2e^{x}-2=0$$

$$(e^{x})^3-(1)^3-2(e^{2x})-2(e^{x})-2=0$$

Transformando conseguimos:

$$(e^{x}-1)(e^{2x}+e^{x}+1)-2(e^{2x}+e^{x}+1)=0$$

$$(e^{2x}+e^{x}+1)[(e^{x}-1)-2]=0$$

Observar que: $e^{2x}+e^{x}+1>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

Luego sólo queda: $e^{x}-1-2=0$

$$e^{x}=3$$

$$\text{Ln}e^{x}=\text{Ln}3$$

$$x\text{Ln}e=\text{Ln}3$$

$$x\cdot 1=\text{Ln}3$$

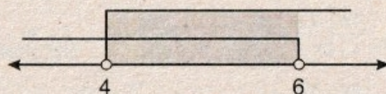
$$\therefore\ x=\text{Ln}3$$

Problema 110
Resolver:

$$\log_2(x-4)<1$$

Resolución:
La inecuación dada es:
$\log_2(x-4)<\text{Log}_2 2$

Ahora se cumple:
$x-4>0\ \wedge\ x-4<2$
$x>4\ \wedge\ x<6$



$$\therefore\ x\in\langle 4;6\rangle$$

Problema 111
Halle el menor «x» que verifica:

$$\log_{(0,\hat{3})}(2x+5)<-2$$

Resolución:
La inecuación dada es;

$$\log_{(0,\hat{3})}(2x+5)<\log_{(0,\hat{3})}(0,\hat{3})^{-2}$$

Ahora se cumple:

$$2x+5>0\ \wedge\ 2x+5>(0,\hat{3})^{-2}$$

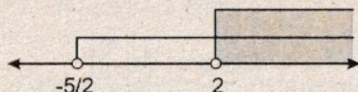
Recuerda que:

$$0,\hat{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$2x+5>0\ \wedge\ 2x+5>9$$

$$\Rightarrow\quad x>-\frac{5}{2}\ \wedge\ x>2$$

En la recta:



Notamos que: x > 2

$$\therefore\ x_{mín}=3\quad \text{¡Entero!}$$

Problema 112

Dada la función $y=F(x)=\dfrac{5^{-|x-1|}}{5^{-|x-1|}+1}$

Determine su rango

A) $\langle 0;1]$ B) $\langle 0;1\rangle$ C) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$

D) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right]$ E) ϕ

Resolución:
La función dada es:

$$y=F(x)=\frac{\dfrac{1}{5^{|x-1|}}}{\dfrac{1}{5^{|x-1|}}+1}$$

$$y = F(x) = \frac{1}{1+5^{|x-1|}}$$

Fácilmente reconocemos que:

$$|x-1| \geq 0 \;;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

En forma equivalente tenemos:

$$5^{|x-1|} \geq 5^0$$

$$5^{|x-1|} \geq 1$$

$$1 \leq 5^{|x-1|} < \infty$$

Sumando uno conseguimos

$$2 \leq 5^{|x-1|} + 1 < \infty$$

Tomando el recíproco tenemos:

$$0 < \frac{1}{5^{|x-1|}+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right]$$

$$\therefore \; \text{Ran}(F) = \left\langle 0; \frac{1}{2} \right]$$

***Clave:* D**

Problema 113

Un obrero típico de una fábrica puede producir F(T) unidades diarias después de T días de desarrollar el mismo trabajo, donde $F(T) = 50\left(1 - e^{-0,34T}\right)$

¿Cuántas unidades diarias se puede llegar a esperar que produzca el mismo obrero?

A) 45 B) 47 C) 48
D) 50 E) 51

Resolución:

La función exponencial es:

$$F(T) = 50\left(1 - e^{-0,34T}\right)$$

Observa que $e^{-0,34T} = \left(\frac{1}{e}\right)^{0,34T}$ para un tiempo lo suficientemente prolongado $(T \to \infty)$ tenemos $e^{-0,34T} = 0$.

Finalmente el obrero típico producirá a lo más:

$$F(T \to \infty) = 50(1-0) = 50(1)$$

$$F(T \to \infty) = 50$$

***Clave:* D**

Problema 114

Determinar el máximo valor de la función F, donde:

$$y = F(X) = 5^{2x-x^2}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Por teorema podemos plantear:

$$(x-1)^2 \geq 0 \;;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 - 2x \geq -1$$

Multiplicando por – 1 tenemos: $2x - x^2 \leq 1$

En forma equivalente:

$$5^{2x-x^2} \leq 5^1 \Leftrightarrow y = F(x) \leq 5$$

$$\therefore \; \text{Máximo de } y = F(x) = 5$$

***Clave:* E**

Problema 115

Resolver: $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$

Resolución:

La inecuación dada equivale a:

$$\log_2\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right) > 2 \quad \wedge \; 3x+2>0 \; \wedge \; 1-2x>0$$

$$\log_2\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right) > \log_2 4 \; \wedge \; 3x+2>0 \; \wedge \; 1-2x>0$$



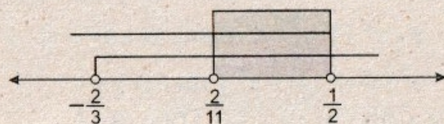
$$\left\{\frac{3x+2}{1-2x}>0\wedge\frac{3x+2}{1-2x}>4\right\}\wedge\{3x+2>0\wedge 1-2x>0\}$$

$$3x+2>0 \;\wedge\; 1-2x>0 \;\wedge\; \frac{3x+2}{1-2x}>4$$

$$3x+2>0 \;\wedge\; 2x-1<0 \;\wedge\; \frac{3x+2}{2x-1}+4<0$$

$$3x+2>0 \;\wedge\; 2x-1<0 \;\wedge\; \frac{11x-2}{2x-1}<0$$

Ahora en la recta:



$$\therefore\; x\in\left\langle\frac{2}{11};\,\frac{1}{2}\right\rangle$$

Problema 116

Resolver:

$$\log_{\left(\frac{25-x^2}{16}\right)}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>1$$

Resolución:

La inecuación dada es: $\log_{\left(\frac{25-x^2}{16}\right)}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>\log_{\left(\frac{25-x^2}{16}\right)}\left(\frac{25-x^2}{16}\right)$

Al no apreciar un valor determinado para la base, debemos plantearnos los dos casos, siguiendo la solución del problema, la unión de los mencionados casos, intersectando con la condición de existencia.

Caso (I)

$$0<\frac{25-x^2}{16}<1 \qquad\wedge\qquad \frac{24-2x-x^2}{14}<\frac{25-x^2}{16}$$

$$0<25-x^2<16 \qquad\wedge\qquad 192-16x-8x^2<175-7x^2$$

$$-25<-x^2<-9 \qquad\wedge\qquad -x^2-16x+17<0$$

$$9<x^2<25 \qquad\wedge\qquad x^2+16x-17>0$$

$$\{-5<x<-3 \vee 3<x<5\} \qquad\wedge\qquad (x+17)(x-1)>0$$

$$\{-5<x<-3 \vee 3<x<5\} \qquad\wedge\qquad \{-\infty<x<-17 \vee 1<x<\infty\}$$

Solución (I) $\qquad 3<x<5 \;\Rightarrow\; x\in\langle 3;5\rangle$

Caso (II)

$$\frac{25-x^2}{16}>1 \qquad\wedge\qquad \frac{24-2x-x^2}{14}>\frac{25-x^2}{16}$$

$25-x^2>16 \wedge 192-16x-8x^2>175-7x^2$

$9-x^2>0 \;\wedge\; x^2-16x+17<0$

$x^2-9<0 \;\wedge\; -x^2+16x-17>0$

$(x+3)(x-3)<0 \wedge (x+17)(x-1)<0$

$\{-3<x<3\} \wedge \{-17<x<1\}$

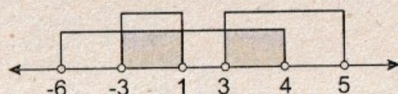
Solución (II) $-3<x<1 \Rightarrow x\in\langle -3;1\rangle$

Para la existencia:

$\dfrac{24-2x-x^2}{14}>0 \Leftrightarrow x^2+2x-24<0$

$(x+6)(x-4)<0 \Leftrightarrow -6<x<4$

Finalmente en la recta se tendrá:



$\therefore\; x\in\langle -3\,;1\rangle \cup \langle 3\,;4\rangle$

Problema 117

Dada la función

$$y=F(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{5^x-7^x}}$$

Determine su dominio maximal

A) $[-2;0\rangle$ B) $\langle -1;1\rangle$ C) $\langle 0;2]$

D) $[-2;0]$ E) $[-2;0\rangle \cup \langle 0;2]$

Resolución:

Por existencia de $y=F(x)$ en $\mathbb{R}$ se debe cumplir que:

$4-x^2\geq 0 \;\wedge\; 5^x-7^x>0$

$x^2-4\leq 0 \;\wedge\; 5^x-7^x$

$(x+2)(x-2)\leq 0 \;\wedge\; \dfrac{5^x}{7^x}>1$

$(x+2)(x-2)\leq 0 \;\wedge\; \left(\dfrac{5}{7}\right)^x>\left(\dfrac{5}{7}\right)^0$

En forma equivalente tenemos:

$$\frac{-2\leq x\leq 2 \;\wedge\; x<0}{-2\leq x<0}$$

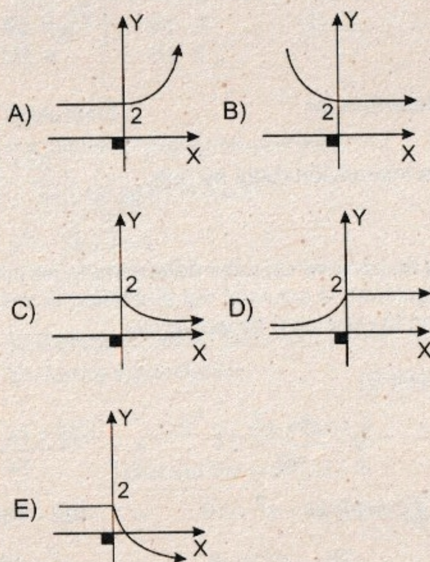
$\therefore\; \text{Dom}(F)=[-2\,;0\rangle$

Clave: A

Problema 118

Esbozar la gráfica de la función F, donde

$$y=F(x)=\frac{2^{1-|x|}}{2^x}$$



Resolución:

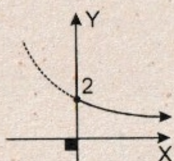
Redefiniendo la función tenemos:

$$y=F(x)=\begin{cases}2^{1-2x} & ;\; x\geq 0\\ 2 & ;\; x<0\end{cases}$$

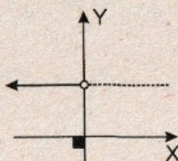
$$y=F(x)=\begin{cases}2\left(\dfrac{1}{4}\right)^x & ;\; x\geq 0 \;.......(F_1)\\ 2 & ;\; x<0 \;.......(F_2)\end{cases}$$



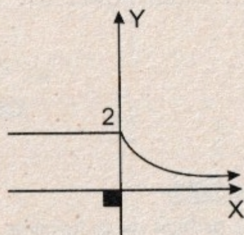
Para (F_1):



Para (F_2):



Finalmente la gráfica de F viene dada por la unión de las gráficas de F_1 y F_2, veamos:



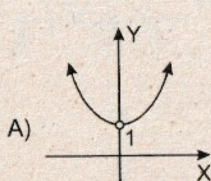
Clave: **C**

Problema 119

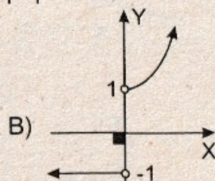
Esbozar la gráfica de la siguiente función

$$y = F(x) = \frac{x}{|x|}e^{x+|x|}$$

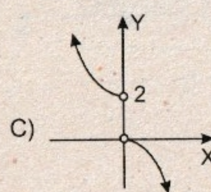
A)



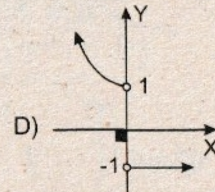
B)



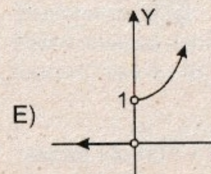
C)



D)



E)



Resolución:

I. Si $x > 0 \Rightarrow y = F(x) = \frac{x}{x}e^{x+x}$

$$y = F(x) = e^{2x}$$

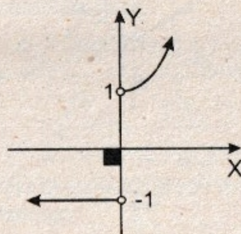
II. Si $x < 0 \Rightarrow y = F(x) = \frac{x}{-x}e^{x+x}$

$$y = F(x) = -1$$

Redefiniendo la función tenemos:

$$y = F(x) = \begin{cases} e^{2x} & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

Finalmente la gráfica aproximada será:



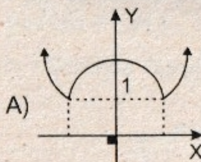
Clave: **B**

Problema 120

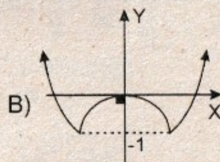
Esbozar la gráfica de la función

$$y = F(x) = |3^{1+|x|} - 4| - 1$$

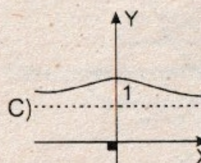
A)



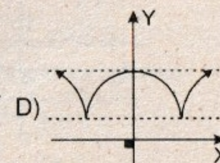
B)



C)

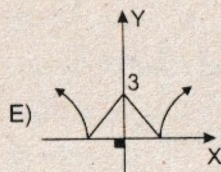


D)





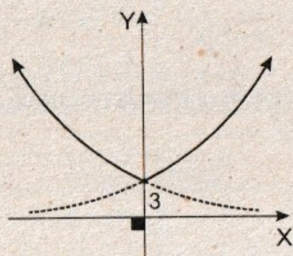
E)



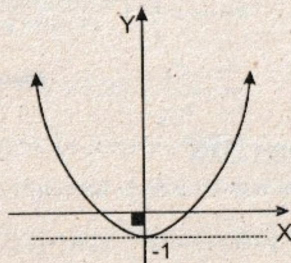
Resolución:

Graficando la función y = F(x) por partes

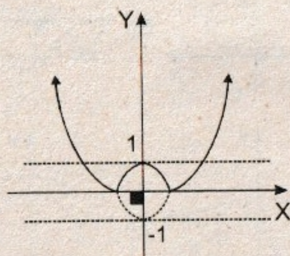
I. $y = 3^{1+|x|} = 3.3^{|x|}$



II. $y = 3^{1+|x|} - 4$

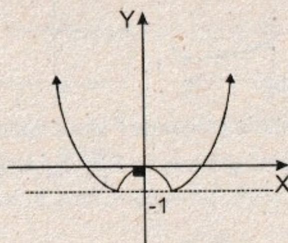


III. $y = \left|3^{1+|x|} - 4\right|$



Finalmente tenemos:

IV. $y = |3^{1+|x|} - 4| - 1$



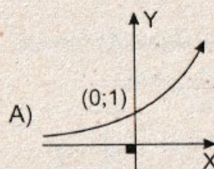
***Clave:* B**

Problema 121

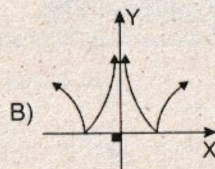
Esbozar la gráfica de la función

$$y = F(x) = |e^x - e|$$

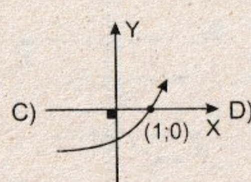
A)



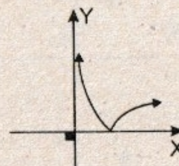
B)



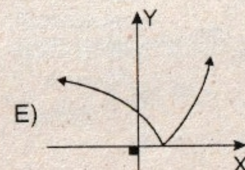
C)



D)



E)

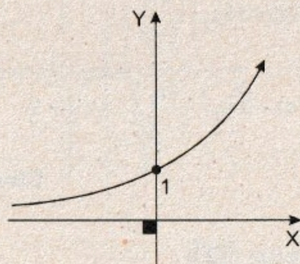


Resolución:

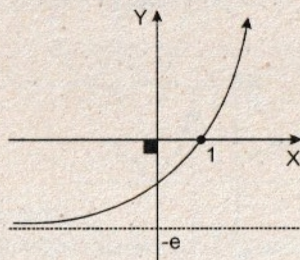
graficando la función y = F(x) por partes:



I. $y = e^x$

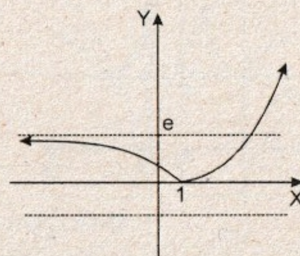


II. $y = e^x - e$



III. Finalmente tenemos:

$$y = \left|e^x - e\right|$$



***Clave:* E**

Problema 122

Determinar el dominio y la fórmula de la función inversa de la siguiente función:

$$y = F(x) = \frac{2^x}{2^x + 4}$$

A) $F^*(x) = \text{Log}_2\left(\frac{4x}{1-x}\right); x \in \langle 0 ; 1\rangle$

B) $F^*(x) = \text{Log}_2\left(\frac{x}{2-x}\right); x \in \langle 0 ; 2\rangle$

C) $F^*(x) = \text{Log}_2\left(\frac{4x}{1-x}\right); x \in \left\langle 0 ; \frac{1}{2}\right\rangle$

D) $F^*(x) = \text{Log}_2\left(\frac{3x}{3-x}\right); x \in \langle 0 ; 3\rangle$

E) $F^*(x) = \text{Log}_2\left(\frac{4x}{2-x}\right); x \in \langle 0 ; 2\rangle$

Resolución:

Veamos si y = F(x) es inyectiva, para lo cual planteamos que:

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(F) : F(x_1) = F(x_2)$$

$$\frac{2^{x_1}}{2^{x_1} + 4} = \frac{2^{x_2}}{2^{x_2} + 4}$$

Efectuando la multiplicación en forma de aspa tenemos:

$$2^{x_1 + x_2} + 4 \cdot 2^{x_1} = 2^{x_1 + x_2} + 4 \cdot 2^{x_2}$$

$$4 \cdot 2^{x_1} = 4 \cdot 2^{x_2}$$

$$2^{x_1} = 2^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

Ahora fácilmente reconocemos que y = F(x) es inyectiva, por tanto existe su función inversa.

I. Hallemos $\text{Dom}(F^*) = \text{Ran}(F)$:

$$y = F(x) = \frac{2^x}{2^x + 4}$$

$$y = F(x) = 1 - \frac{4}{2^x + 4}$$

De acuerdo con la teoria se plantea:

$$2^x > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2^x + 4 > 4$$

En forma equivalente tenemos:

$$4 < 2^x + 4 < \infty$$

$$0 < \frac{1}{2^x + 4} < \frac{1}{4}$$

$$0 < \frac{4}{2^x + 4} < 1$$

$$-1 < -\frac{4}{2^x + 4} < 0$$

$$0 < 1 - \frac{4}{2^x + 4} < 1$$

$$0 < y < 1 \Leftrightarrow y \in \langle 0;1 \rangle$$

Fácilmente reconocemos que:

$$\text{Ran}(F) = \langle 0\ ;\ 1 \rangle = \text{Dom}(F^*)$$

III. Hallemos la fórmula de $y = F^*(x)$

$$F: y = \frac{2^x}{2^x + 4} \Leftrightarrow y \cdot 2^x + 4y = 2^x$$

$$4y = 2^x - y \cdot 2^x$$

$$4y = 2^x(1-y)$$

$$\frac{4y}{1-y} = 2^x$$

$$\log_2\left(\frac{4y}{1-y}\right) = \log_2 2^x$$

$$\log_2\left(\frac{4y}{1-y}\right) = x \cdot \log_2 2$$

$$\log_2\left(\frac{4y}{1-y}\right) = x \cdot 1$$

$$\log_2\left(\frac{4y}{1-y}\right) = x$$

$$x = \log_2\left(\frac{4y}{1-y}\right)$$

Ahora reemplazamos x por y:

$$y = F^*(x) = \log_2\left(\frac{4x}{1-x}\right)$$

$$\therefore\ F^*(x) = \log_2\left(\frac{4x}{1-x}\right);\ x \in \langle 0;1 \rangle$$

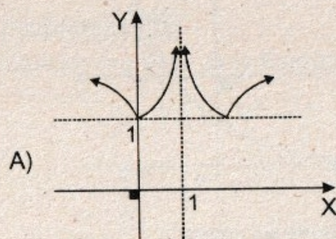
Clave: A

Problema 123

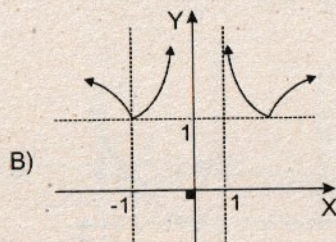
Esbozar la gráfica de la función:

$$y = F(x) = |\log_3|x-1|+1|$$

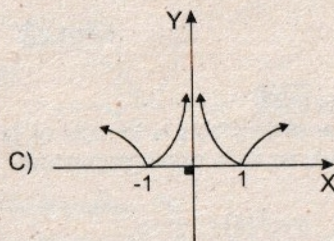
A)



B)

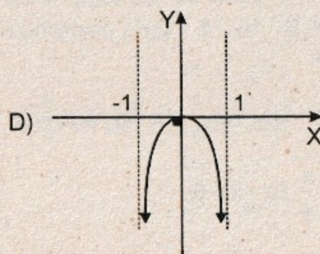


C)

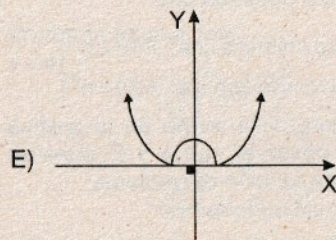




D)



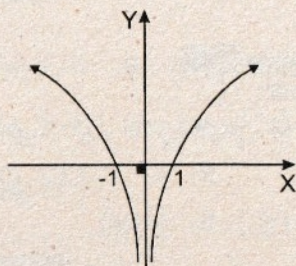
E)



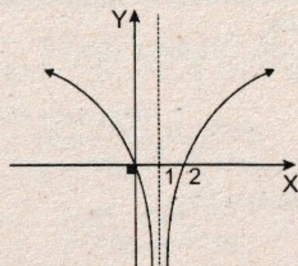
Resolución:

Graficando la función y = F(x) por partes

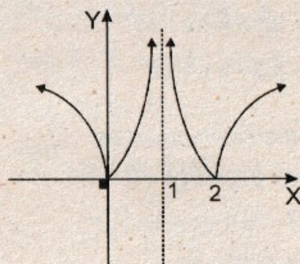
I. $y = \log_3 |x|$



II. $y = \log_3 |x-1|$

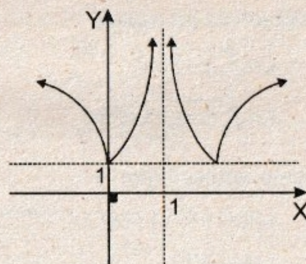


III. $y = |\log_3 |x-1||$



IV. Finalmente tenemos:

$$y = |\log_3 |x-1|| + 1$$



Clave: **A**

Problema 124

Determinar el campo de definición de la siguiente función real de variable real:

$$H(x) = \sqrt[4]{\text{Ln}\sqrt{\text{Ln}\big(F\big(F\big(F(x+3)\big)\big)\big)}}$$

Siendo: $F(x) = x - 1$

A) $x > 0$ B) $x \geq 1$ C) $x \geq e$

D) $x \geq e^e$ E) $x \in \mathbb{R}^+$

Resolución:

Si: $F(x) = x - 1$

$\Rightarrow F(x+3) = x + 3 - 1$

$F(x+3) = x + 2$

Ahora se plantea:

$F(F(x+3)) = F(x+2)$

$F(F(x+3)) = x+2-1$

$F(F(x+3)) = x+1$

Nuevamente planteamos:

$F(F(F(x+3))) = F(x+1)$

$F(F(F(x+3))) = x+1-1$

$F(F(F(x+3))) = x$

Ahora en la función H:

$$H(x) = \sqrt[4]{Ln\sqrt{Ln(x)}}$$

Por existencia en reales:

$$Ln\sqrt{Ln(x)} \geq 0$$

$$Ln\sqrt{Ln(x)} \geq Ln(1)$$

En forma equivalente:

$$Ln(x) > 0 \wedge Ln(x) \geq 1$$

$$Ln(x) \geq 1$$

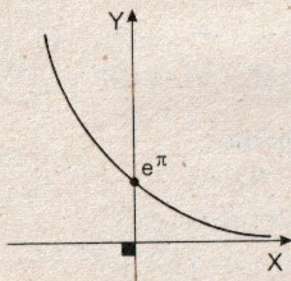
$$Ln(x) \geq Ln(e)$$

$$\therefore\ x \geq e$$

***Clave:* C**

Problema 125

Dada la función $y = F(x) = e^{ax+b}$, cuya gráfica es:



Donde **e** es la base de los logaritmos naturales: Si $ax+b>2\pi$, podemos afirmar que:

A) $x>2\pi$ B) $x>\frac{\pi}{a}$ C) $x<\frac{\pi}{a}$

D) $0<x<\frac{\pi}{a}$ E) $x<0$

Resolución:

De la gráfica notamos que:

De la gráfica notamos que: $F(0) = e^{\pi}$
De acuerdo con la fórmula: $F(0) = e^{b}$ } $b = \pi$

Además según la forma de la gráfica podemos observar que a < 0, pues se trata de una función decreciente:

En la inecuación tenemos:

$$ax+\pi>2\pi$$

$$ax>\pi$$

$$\therefore\ x<\frac{\pi}{a}$$

***Clave:* C**

Problema 126

Resolver:

$$2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}<5^{x+1}-5^{x+2}$$

A) $\mathbb{R}$ B) ϕ C) $\langle 0;\infty \rangle$

D) $\langle -1;1 \rangle$ E) $\langle -\infty;0 \rangle$

Resolución:

Extrayendo factor común en cada uno de los miembros de la inecuación propuesta, tenemos:

$$2^{x+2}\left(1-2-2^2\right)<5^{x+1}(1-5)$$

$$2^{x+2}(-5)<5^{x+1}(-4)$$

Multiplicando por – 1:

$$2^{x+2}\cdot 5>5^{x+1}\cdot 4$$



$$2^x \cdot 2^2 \cdot 5 > 5^x \cdot 5 \cdot 2^2$$

$$2^x > 5^x$$

Al dividir por 5^x, tenemos:

$$\frac{2^x}{5^x} > \frac{5^x}{5^x}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$$

En forma equivalente:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x < 0$$

$$\therefore\ CS = \langle -\infty ; 0 \rangle$$

Clave: E

Problema 127

Resolver: $\sqrt{\log_2\left(3^x - 1\right)} < 1$

A) $\left[\log_3 2 ; 1\right\rangle$ B) $\left\langle \log_3 4 ; 2\right\rangle$

C) $\left\langle \log_3 2 ; 2\right\rangle$ D) $\left\langle \log_3 2 ; 2\right]$

E) $\left\langle \log_3 2 ; 1\right\rangle$

Resolución:

La inecuación con la teoria:

$$\log_2(3^x - 1) \geq 0 \wedge \log_2(3^x - 1) < 1$$

$$\log_2(3^x - 1) \geq \log_2 1 \wedge \log_2(3^x - 1) < \log_2 2$$

En forma equivalente:

$$\log_2 1 \leq \log_2(3^x - 1) < \log_2 2$$

$$1 \leq 3^x - 1 < 2$$

$$2 \leq 3^x < 3$$

Tomando logaritmo en base 3, tenemos:

$$\log_3 2 \leq \log_3 3^x < \log_3 3$$

$$\log_3 2 \leq x \cdot \log_3 3 < \log_3 3$$

$$\log_3 2 \leq x < 1$$

$$\Leftrightarrow\ x \in \left[\log_3 2 ; 1\right\rangle$$

$$\therefore\ CS = \left[\log_3 2 ; 1\right\rangle$$

Clave: A

Problema 128

Resolver: $x^{2x+1} \leq x^2$

A) $\langle 1;\infty \rangle$ B) $\left[\frac{1}{2};1\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2};1\right\rangle$

D) $\left[\frac{1}{2};\infty\right\rangle$ E) $\langle -\infty;1 \rangle$

Resolución:

I. Si: $0 < x < 1$: $x^{2x+1} \leq x^2$

$$2x + 1 \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

De donde tenemos:

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2};1\right\rangle$$

II. Si: $x > 1$

$$x^{2x+1} \leq x^2$$

$$2x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 2x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

De donde resulta evidente que $x \in \phi$

Finalmente la solución se obtiene de la unión de (I) con (II), esto es:

$$CS = \left[\frac{1}{2};1\right\rangle$$

Clave: B

Problema 129

En la escala de Richter, la intensidad M de un terremoto, se relaciona con su energía E (en ergios) por medio de la fórmula: $\text{LogE} = 11{,}4 + 1{,}5M$ si un terremoto tiene 1 000 veces más energía que otro ¿Cuántas veces mayor es su indice de Richter M?

A) Dos unidades más que el primero
B) Tres unidades más que el primero
C) Cuatro unidades más que el primero
D) Cinco unidades más que el primero
E) Seis unidades más que el primero

Resolución:

Supongamos que E_o es la energía del primer terremoto, luego tenemos:

$$\log E_o = 11{,}4 + 1{,}5M_o$$

De donde:

$$M_o = \frac{2}{3}(\log E_o - 11{,}4) \quad ....(*)$$

Para un segundo terremoto, por condición, se cumple que:

$$E = 1\,000E_o = 10^3 E_o$$

Por fórmula:

$$\log(10^3 E_o) = 11{,}4 + 1{,}5M$$

$$\log 10^3 + \log E_o = 11{,}4 + 1{,}5M$$

$$3 + \underbrace{\log E_o - 11{,}4}_{*} = \frac{3}{2}M$$

$$3 + \frac{3}{2}M_o = \frac{3}{2}M$$

$$6 + 3M_o = 3M$$

$$2 + M_o = M$$

$\therefore$ Un segundo terremoto es dos unidades más que el primero.

Clave: A

Problema 130

Considere la función:

$$y = F(x) = e^{1+\text{Ln}(1-|x|)} \; ; x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right\rangle$$

Determine el rango de F:

A) $\left\langle \frac{e}{4}; \frac{e}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{e}{2} \right]$ C) $\langle 0; e]$

D) $\left\langle \frac{e}{2}; e \right]$ E) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right]$

Resolución:

Por condición:

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \le |x| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < -|x| \le 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - |x| \le 1$$

Tomando logaritmos:

$$\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) < \text{Ln}(1 - |x|) \le \text{Ln}(1)$$

$$\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) < \text{Ln}(1 - |x|) \le 0$$

$$1 + \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) < 1 + \text{Ln}(1 - |x|) \le 1$$

$$\text{Ln}(e) + \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) < 1 + \text{Ln}(1 - |x|) \le \text{Ln}(e)$$

En forma equivalente:

$$e^{\text{Ln}\left(\frac{e}{2}\right)} < e^{1+\text{Ln}(1-|x|)} \le e^{\text{Ln}(e)}$$

Finalmente tenemos:

$$\frac{e}{2} < y \le e \Leftrightarrow y \in \left\langle \frac{e}{2}; e \right]$$

$$\therefore \; \text{Ran}(F) = \left\langle \frac{e}{2}; e \right\rangle$$

Clave: D

Problema 131

Determine el rango de la siguiente función:

$$y = F(x) = Ln\left(\frac{1}{Ln(x)-1}\right); x \in \langle e;\infty\rangle$$

A) $\langle 0;\infty\rangle$ B) $\langle e;\infty\rangle$ C) $\langle 1;\infty\rangle$

D) $\mathbb{R}$ E) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Resolución:

Por condición tenemos: $x \in \langle e;\infty\rangle$

$$x > e$$
$$Ln(x) > Ln(e)$$
$$Ln(x) > 1$$
$$Ln(x) - 1 > 0$$

Por teorema se cumple:

$$\frac{1}{Ln(x)-1} > 0$$

Fácilmente reconocemos:

$$Ln\left(\frac{1}{Ln(x)-1}\right) \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{R}$$

$$\therefore\ Ran(F) = \mathbb{R}$$

Clave: D

Problema 132

Calcular $\log_2(x_1 \cdot x_2)$, siendo x_1 y x_2 las soluciones de la ecuaciòn:

$$5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$$

A) -2 B) -1 C) 0

D) 1 E) 2

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$6^{1+x} - 30 = 150^x - 5^{1+2x}$$

$$6 \cdot 6^x - 30 = (6 \cdot 5^2)^x - 5^{1+2x}$$

$$6 \cdot (6^x - 5) = 6^x \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 5^{2x}$$

$$6(6^x - 5) = 5^{2x}(6^x - 5)$$

$$6(6^x - 5) - 5^{2x}(6^x - 5) = 0$$

$$(6^x - 5)(6 - 5^{2x}) = 0$$

Por teorema se cumple que:

$$6^x - 5 = 0 \quad \vee \quad 6 - 5^{2x} = 0$$

$$6^x = 5 \quad \vee \quad 5^{2x} = 6$$

$$\log_6 6^x = \log_6 5 \vee \log_5 5^{2x} = \log_5 6$$

$$x = \log_6 5 \quad \vee \quad 2x = \log_5 6$$

$$x = \log_6 5 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}\log_5 6$$

Finalmente planteamos:

$$\log_2(x_1 \cdot x_2) = \log_2\left(\log_6 5 \cdot \frac{1}{2}\log_5 6\right)$$

$$\log_2(x_1 \cdot x_2) = \log_2\left(\frac{1}{2}\log_6 5 \cdot \log_5 6\right)$$

$$\log_2(x_1 \cdot x_2) = \log_2\left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)$$

$$\log_2(x_1 \cdot x_2) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2^{-1})$$

$$\log_2(x_1 \cdot x_2) = -1 \cdot \log_2 2 = -1 \cdot 1$$

$$\therefore\ \log_2(x_1 \cdot x_2) = -1$$

Clave: B

Problema 133

Resolver:

$$\left(3+\sqrt{8}\right)^x + \left(3-\sqrt{8}\right)^x \le 34$$

A) $[-2;2]$ B) $[-4;4]$

C) $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ D) $\left[\sqrt{8};2\sqrt{8}\right]$

E) $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Resolución:

Supongamos que $(3+\sqrt{8})^x = a$, luego fácilmente podemos reconocer que $(3-\sqrt{8})^x = \frac{1}{a}$, con lo cual la inecuación mostrada inicialmente será: $a + \frac{1}{a} \leq 34$.

Como a > 0, tenemos:

$$a^2 + 1 \leq 34a$$

$$a^2 - 34a \leq -1$$

$$a^2 - 2(a)(17) + 17^2 \leq 17^2 - 1$$

$$(a-17)^2 \leq 18 \cdot 16$$

$$|a-17| \leq 12\sqrt{2}$$

$$-12\sqrt{2} \leq a - 17 \leq 12\sqrt{2}$$

$$17 - 12\sqrt{2} \leq a \leq 17 + 12\sqrt{2}$$

$$(3-\sqrt{8})^2 \leq a \leq (3+\sqrt{8})^2$$

$$(3+\sqrt{8})^{-2} \leq (3+\sqrt{8})^x \leq (3+\sqrt{8})^2$$

Por teorema:

$$-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2;2]$$

$$\therefore \ CS = [-2;2]$$

***Clave:* A**

Problema 134

Calcular ex^4, si se cumple que:

$$[Ln(x)+1]^{Ln(ex^2)} = 2$$

A) e^{-2} B) e^{-3} C) e^{-4}
D) e^{-5} E) e^{-6}

Resolución:
En la ecuación tenemos:

$$[Ln(x)+Ln(e)]^{Ln\left(\frac{e^2x^2}{e}\right)} = 2$$

$$[Ln(ex)]^{Ln(e^2x^2)-Ln(2)} = 2$$

$$[Ln(ex)]^{2Ln(ex)-1} = 2$$

Dando forma tenemos:

$$[Ln(ex)]^{2Ln(ex)-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2\left(\frac{1}{4}\right)-1} \Leftrightarrow Ln(ex) = \frac{1}{4}$$

Según la definición tenemos:

$$e^{\frac{1}{4}} = ex \Leftrightarrow e = e^4x^4$$

Finalmente se divide por e^3:

$$\frac{e}{e^3} = \frac{e^4x^4}{e^3} \Leftrightarrow e^{1-3} = ex^4$$

$$\therefore \ e^{-2} = ex^4$$

***Clave:* A**

Problema 135

Si $x - \log_2 x = 2$. Calcular: $x + \log_2 x$

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución:
De la condición:

$$x - 2 = Log_2 x \Leftrightarrow 2^{x-2} = x$$

$$\frac{2^x}{2^2} = x$$

$$2^x = 4x$$

Aquí reconocemos: x = 4, con lo cual:

$$E = x + \log_2 x = 4 + \log_2 4 = 4 + 2$$

$$\therefore \ E = 6$$

***Clave:* B**

Problema 136

Reducir:

$$\frac{1}{1+\log_3(10e)} + \frac{1}{1+\ln(30)} + \frac{1}{1+\log(3e)}$$

A) 1 B) log3 C) ln(10) D) ln(30) E) log(3e)

Resolución:
La expresión es:

$$E=\frac{1}{\log_3 3+\log_3(10e)}+\frac{1}{\ln(e)+\ln(30)}+\frac{1}{\log(10)+\log(3e)}$$

$$E=\frac{1}{\log_3(30e)}+\frac{1}{\ln(30e)}+\frac{1}{\log(30e)}$$

Por propiedad:

$$E=\text{Log}_{(30e)}(3)+\text{Log}_{(30e)}(e)+\text{Log}_{(30e)}(10)$$

$$E=\text{Log}_{(30e)}(3\cdot e\cdot 10)=\text{Log}_{(30e)}(30e)$$

$$\therefore\ E=1$$

Clave: A

Problema 137
Determine «x» en:

$$\log_2(\log_4(\log_2 x))+\log_4(\log_2(\log_2 x))=2$$

A) 2 B) 2^2 C) 2^3 D) 2^8 E) 2^{16}

Resolución:
Expresando cada logaritmo de base 4 en función de la base 2, tenemos que:

$$\log_2(\log_2\sqrt{\log_2 x})+\log_2(\sqrt{\log_2(\log_2 x)})=2$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\log_2(\log_2 x)\right)+\frac{1}{2}\cdot\log_2\left(\log_2(\log_2 x)\right)=2$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(\log_2(\log_2 x)\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\log_2(\log_2 x)\right)=2$$

$$-1+\frac{3}{2}\log_2(\log_2(\log_2 x))=2$$

$$\frac{3}{2}\log_2(\log_2(\log_2 x))=3 \qquad \log_2(\log_2(\log_2 x))=2$$

$$\log_2(\log_2 x)=2^2$$

Por definición: $\text{Log}_2 x=2^{2^2}\Leftrightarrow x=2^{2^{2^2}}$

$$\therefore\ x=2^{16}$$

Clave: E

Problema 138

Determine el rango de la siguiente función:

$$y = F(x) = 2^{x-[\![x]\!]};\ x \in \mathbb{R}$$

A) $\langle 0;\infty\rangle$ B) $\langle 2;\infty\rangle$ C) $[1;2\rangle$ D) $[1;4\rangle$ E) $[0;4\rangle$

Resolución:

Se sabe que si $x \in \mathbb{R}: [\![x]\!] \le x < [\![x]\!]+1$

$$0 \le x-[\![x]\!] < 1$$

Equivalentemente:

$$2^0 \le 2^{x-[\![x]\!]} < 2^1 \Leftrightarrow 1 \le y < 2$$

$$y \in [1;2\rangle$$

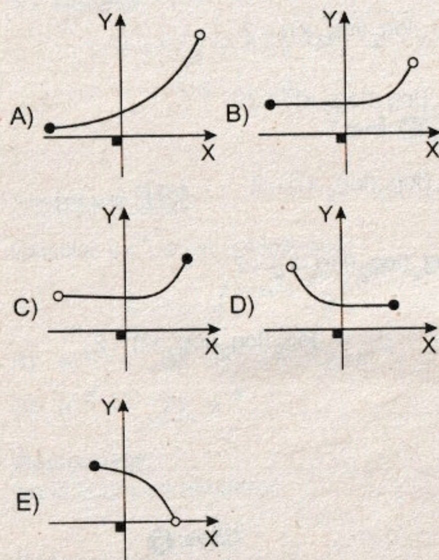
$\therefore\ \text{Ran}(F) = [1;\,2\rangle$

Clave: C

Problema 139

Esbozar la gráfica de la función F, donde:

$$y = F(x) = 2^{|x-1|+x}\ ;\ -2 \le x < 3$$



Resolución:

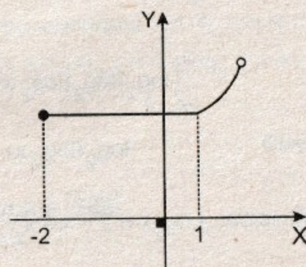
Redefiniendo la función tenemos:

$$y = F(x) = \begin{cases} 2^{x-1+x} & ;\ 1 \le x < 3 \\ 2^{-x+1+x} & ;\ -2 \le x < 1 \end{cases}$$

$$y = F(x) = \begin{cases} 2^{2x} & ;\ 1 \le x < 3 \\ 2^{1} & ;\ -2 \le x < 1 \end{cases}$$

$$y = F(x) = \begin{cases} 4^{x} & ;\ 1 \le x < 3 \\ 2 & ;\ -2 \le x < 1 \end{cases}$$

Finalmente graficando tenemos:



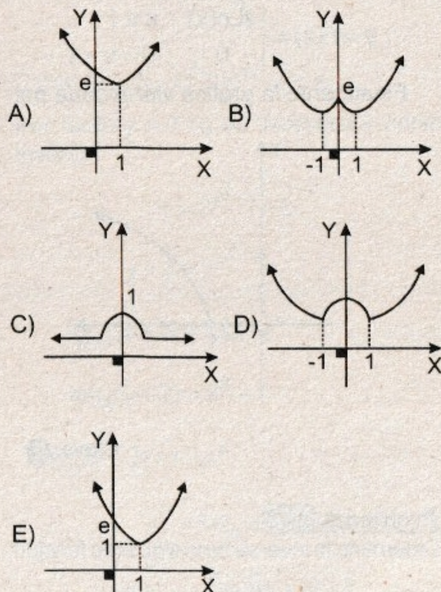
Clave: B



Problema 140

Esbozar la gráfica de la siguiente función:

$$y = F(x) = e^{x^2 - 2|x| + 1}$$



Resolución:

Fácilmente podemos reconocer que y = F(x) es una función par, luego si graficamos con $x \geq 0$ su gráfica final se obtendrá al unir la gráfica obtenida con su reflejo a través del eje de ordenadas.

$$F: y = F(x) = e^{x^2 - 2|x| + 1}$$

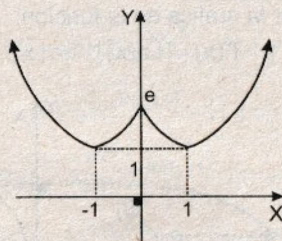
Como:

$$|x|^2 = x^2 \ ; \ y = F(x) = e^{|x|^2 - 2|x| + 1}$$

$$y = F(x) = e^{(|x| - 1)^2}$$

$$y = F(x) = \begin{cases} e^{(x-1)^2} & ; \ x \geq 0 \\ e^{(x-1)^2} & ; \ x < 0 \end{cases}$$

Finalmente la gráfica será:



***Clave:* B**

Problema 141

Sean las funciones

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ y = F(x) = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$$

$$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ y = G(x) = \log_{(0,2)} x$$

¿En qué parte del eje X la gráfica de F esta encima de la gráfica de G?

A) $\langle 0; \infty \rangle$ B) $\langle 1; \infty \rangle$ C) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$

D) $\langle 0; 1 \rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{1}{6} \right\rangle$

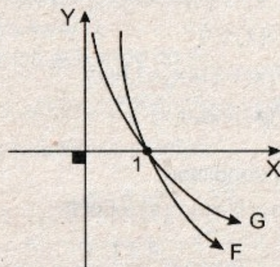
Resolución:

Las funciones son:

$$y = F(x) = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$$

$$y = G(x) = \log_{\left(\frac{1}{5}\right)} x$$

Graficando tenemos:



$\therefore$ La gráfica de F está encima de la gráfica de G en $\langle 0; 1 \rangle$.

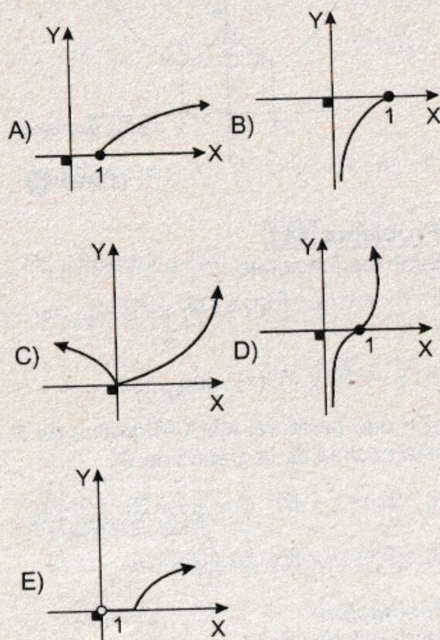
***Clave:* D**



Problema 142

Esbozar la gráfica de la función:

$$y = F(x) = |Ln(x)| + Ln|x|$$



Resolución:

Por existencia de la expresión logarítmica en $\mathbb{R}$ se cumple que $x > 0$. Ahora la función será:

$$y = F(x) = |Ln(x)| + Ln(x)$$

I. Si $Ln(x) \geq 0$:

$$y = F(x) = Ln(x) + Ln(x)$$
$$y = F(x) = 2Ln(x)$$

De la condición:

$$Ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow Ln(x) \geq Ln(1)$$
$$x \geq 1$$

II. Si $Ln(x) < 0$:

$$y = F(x) = -Ln(x) + Ln(x)$$
$$y = F(x) = 0$$

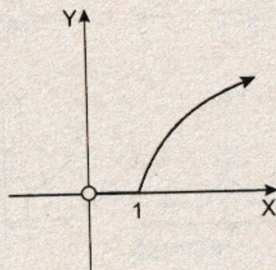
De la condición:

$$Ln(x) < 0 \Leftrightarrow Ln(x) < Ln(1)$$
$$0 < x < 1$$

Redefiniendo la función:

$$y = F(x) = \begin{cases} 2Ln(x) & ; \ x \geq 1 \\ 0 & ; \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Finalmente la gráfica viene dada por:



***Clave:* E**

Problema 143

Determine la inversa de la siguiente función:

$$y = F(x) = 3^{x^2-1} - 2 \ ; \ x \in [3 \ ; \infty\rangle$$

A) $F^*(x) = \sqrt{\log_3(x+2) - 1}$

B) $F^*(x) = -\sqrt{\log_3(x+2) + 1}$

C) $F^*(x) = \sqrt{\log_3(x+2) + 1}$

D) $F^*(x) = 2^{\sqrt{x-1}} - 3$

E) $F^*(x) = \sqrt{\log_3(x-2) - 1}$

Resolución:

Veamos si $y = F(x)$ es inyectiva, para lo cual se plantea $F(x_1) = F(x_2)$ es decir:

$$3^{x_1^2-1} - 2 = 3^{x_2^2-1} - 2$$
$$3^{x_1^2-1} = 3^{x_2^2-1}$$

$$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$|x_1| = |x_2|$$

Como: $x_1;\ x_2 \in [3;\infty\rangle$: $x_1 = x_2$

Por tanto y = F(x) es inyectiva y posee inversa.

$$y = 3^{x^2-1} - 2$$

$$y + 2 = 3^{x^2-1}$$

$$\log_3(y+2) = \log_3(3^{x^2-1})$$

$$\log_3(y+2) = x^2 - 1$$

$$\log_3(y+2) + 1 = x^2$$

$$x^2 = \log_3(y+2) + 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\log_3(y+2)+1}$$

$$|x| = \sqrt{\log_3(y+2)+1}$$

Como $x \geq 3$ tenemos:

$$x = \sqrt{\log_3(y+2)+1}$$

Ahora cambiamos x por y

$$y = \sqrt{\log_3(x+2)+1}$$

$$\therefore\ y = F^*(x) = \sqrt{\log_3(x+2)+1}$$

***Clave:* C**

Problema 144

Dada la función:

$$y = F(x) = 2^{\log(x^2+1)}\ ;\ x \in [3;\infty\rangle$$

Determine $F^*(x)$

A) $F^*(x) = \sqrt{1+10^{\log_2(x)}} - 1\ ;\ x \in [2;\infty\rangle$

B) $F^*(x) = -\sqrt{10^{\log_2(x)}} - 1\ ;\ x \in [2;\infty\rangle$

C) $F^*(x) = -\sqrt{1+10^{\log_2(x)}} - 1\ ;\ x \in [2;\infty\rangle$

D) $F^*(x) = 10^{\log_2(x)}\ ;\ x \in [2;\infty\rangle$

E) $F^*(x) = \sqrt{10^{\log_2(x)} - 1}\ ;\ x \in [2;\infty\rangle$

Resolución:

Veamos si y = F(x) es inyectiva, para lo cual se plantea $F(x_1) = F(x_2)$, es decir:

$$2^{\log\left(x_1^2+1\right)} = 2^{\log\left(x_2^2+1\right)}$$

$$\log\left(x_1^2+1\right) = \log\left(x_2^2+1\right)$$

$$x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$|x_1| = |x_2|$$

Por condición:

$$x_1, x_2 \in [3;\infty\rangle\ ;\ x_1 = x_2$$

Ahora reconoceremos que y = F(x) es inyectiva en $[3;\infty\rangle$, luego si existe su función inversa.

Hallemos el Rango de F:

$$y = F(x) = 2^{\log(x^2+1)};\ x \in [3;\infty\rangle$$

Por condición se plantea:

$$x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$$

$$x^2 + 1 \geq 9 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 10$$

Tomando logaritmo decimal:

$$\log(x^2+1) \geq \text{Log}(10)$$

$$\log(x^2+1) \geq 1$$

En forma equivalente:

$$2^{\log(x^2+1)} \geq 2^1$$

Ahora en verdad tenemos:

$$y \geq 2 \Rightarrow y \in [2;\infty\rangle$$

Hallemos la fórmula de F^*

$$y = 2^{\log(x^2+1)}$$

$$\log_2 y = \log_2 2^{\log(x^2+1)}$$

$$\log_2 y = \log(x^2+1)$$

Por definición:

$$x^2 + 1 = 10^{\log_2 y}$$

$$x^2 = 10^{\log_{2y}} - 1$$

$$x = \sqrt{10^{\log_2(y)} - 1}$$

Cambiando x por y:

$$y = \sqrt{10^{\log_2(x)} - 1}$$

$$\therefore\ y = F^*(x) = \sqrt{10^{\log_2(x)} - 1}\ ;\ x \in [2;\infty\rangle$$

Clave: E

Problema 145

Si F es una función definida por:

$$y = F(x) = \log_5(x-3) + \log_5(x+3)$$

¿Cuál es la fórmula de $F^*(x)$?

A) $F^*(x) = -\sqrt{5^x + 3}$

B) $F^*(x) = \sqrt{5^x + 3}$

C) $F^*(x) = -\sqrt{5^x + 9}$

D) $F^*(x) = \sqrt{5^x + 9}$

E) $F^*(x) = \sqrt{2^x + 3}$

Resolución:

Por existencia de la función logarítmica:

$$x - 3 > 0 \wedge x + 3 > 0$$

$$\underbrace{x > 3 \wedge x > -3}_{x > 3}$$

Ahora la fórmula dada será:

$$y = F(x) = \log_5(x-3) + \log_5(x+3)$$

$$y = F(x) = \log_5[(x-3)(x+3)]$$

$$y = F(x) = \log_5(x^2 - 9)$$

Una rápida inspección permite observar que y = F(x) es una función inyectiva en $\langle 3;\infty\rangle$, luego si existe su función inversa.

Hallemos la fórmula de F^*

$$y = \log_5(x^2 - 9)$$

$$5^y = x^2 - 9$$

$$5^y + 9 = x^2$$

$$x^2 = 5^y + 9$$

$$x = \sqrt{5^y + 9}$$

Finalmente cambiamos x por y:

$$y = \sqrt{5^x + 9}$$

$$\therefore\ y = F^*(x) = \sqrt{5^x + 9}$$

Clave: D

Problema 146

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación:

$$2|9 - x^2| = 2^{\frac{x}{4}}\ ?$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

La ecuación dada se puede reescribir así:

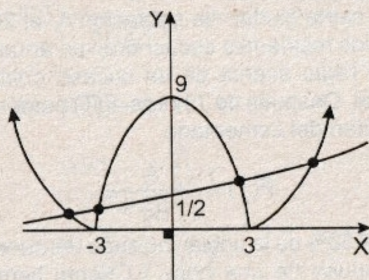
$$|x^2 - 9| = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}^x$$



Supongamos que: $F(x) = |x^2 - 9|$

$$G(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}^x$$

Grafiquemos F y G en un plano cartesiano, los puntos de intersección entre sus gráficas serán solución de la ecuación F = G.



$\therefore$ La ecuación tienen 4 soluciones.

Clave: D

Problema 147

La siguiente aplicación:

$F:[a;8] \to [b;b+2]$, definida por

$F(x) = \log_2 x$ es sobreyectiva.

Calcular: a + b

A) 2 B) 3 C) 4
D) 7 E) 11

Resolución:

Como F es una aplicación,

$Dom(F) = [a;8] \Leftrightarrow a \le x \le 8$

Tomando logaritmo tenemos:

$$\log_2 a \le \log_2 x \le \log_2 8$$

$$\log_2 a \le \log_2 x \le 3$$

$$\log_2 a \le F(x) \le 3$$

Fácilmente reconocemos que:

$$Ran(F) = [Log_2 a ; 3]$$

Como F es sobreyectiva se cumple que $Ran(F) = [b;b+2]$, luego se cumple que:

$$b + 2 = 3 \wedge b = \log_2 a$$

$$b = 1 \wedge 1 = \log_2 a$$

$$b = 1 \wedge a = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

Clave: B

Problema 148

Si $H(x) = 3 - 3|x-1|^2 - 2^{|x-1|}; x \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$

Determine el máximo valor de H(x)

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

Resolución:

I. Supongamos que H(x) = F(x) + G(x), donde:

$$F(x) = 3 - 3|x-1|^2$$

$$F(x) = 3 - 3(x-1)^2$$

* Gráficamente tenemos una parábola invertida de vértice (1 ; 3)

II. $G(x) = -2^{|x-1|}$

* Gráficamente tenemos una exponencial de imágenes negativas y vértice (1;–1)

III. El máximo valor de H(x) ocurre al sumar el máximo valor de F(x) con el máximo valor de G(x), esto es en los vértices.

$$H(x)_{máx} = 3 + (-1) = 3 - 1$$

$$\therefore H(x)_{máx} = 2$$

Clave: D

Problema 149

Determine el rango de la siguiente función:

$$y = F(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1};\ a > 1,\ x \in \left[1;\infty\right\rangle$$

A) $\left[\frac{a-1}{a+1};\infty\right\rangle$ B) $\left[\frac{a}{a+1};\infty\right\rangle$

C) $\left[\frac{a+1}{a-1};\infty\right\rangle$ D) $\mathbb{R}^+$

E) $\left[a;\infty\right\rangle$

Resolución:

La función dada es:

$$y = \frac{a^x + 1 - 2}{a^x + 1} = \frac{a^x + 1}{a^x + 1} - \frac{2}{a^x + 1}$$

$$y = 1 - \frac{2}{a^x + 1}$$

Por condición tenemos:

$$x \geq 1$$

En forma equivalente:

$$a^x \geq a^1$$

$$a^x \geq a$$

$$a^x + 1 \geq a + 1$$

Tomando el recíproco:

$$\frac{1}{a^x + 1} \leq \frac{1}{a + 1}$$

$$-\frac{2}{a^x + 1} \geq -\frac{2}{a + 1}$$

$$\underbrace{1 - \frac{2}{a^x + 1}}_{y} \geq 1 - \frac{2}{a + 1}$$

$$y \geq \frac{a + 1 - 2}{a + 1}$$

$$y \geq \frac{a - 1}{a + 1}$$

$$\therefore\ \text{Ran}(F) = \left[\frac{a-1}{a+1};\infty\right\rangle$$

Clave: A

Problema 150

En cierta ciudad de población A, el 20% de los residentes escucharon un anuncio por radio acerca de un suceso político local. Después de T horas, F(T) personas sabían del comentario.

$$F(T) = \frac{A}{1 + Be^{-kT}}$$

Si el 50% de la poblaciòn supo del suceso despuès de una hora. ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que el 80% de la población se enteró de la noticia?

A) 1 H B) 2 H C) 3 H
D) 4 H E) 1,5 H

Resolución:

Del enunciado tenemos:

I. Si $T = 0 : 0{,}2A = \dfrac{A}{1 + Be^{-k(0)}}$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{1 + B} \Rightarrow B = 4$$

II. Si $T = 1 : 0{,}5A = \dfrac{A}{1 + Be^{-k}}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 4e^{-k}}$$

$$1 + 4e^{-k} = 2$$

$$4e^{-k} = 1$$

$$e^{-k} = 4^{-1} \Rightarrow k = \text{Ln}(4)$$

III. En T horas:

$$F(T) = \frac{A}{1 + 4e^{-\text{Ln}(4)\cdot T}}$$

$$F(T)=\frac{A}{1+4\left[e^{Ln(4)}\right]^{-T}}$$

$$F(T)=\frac{A}{1+4\cdot4^{-T}}$$

$$F(T)=\frac{A}{1+4^{1-T}}$$

IV. Si $F(T)=0{,}8A$:

$$0{,}8A=\frac{A}{1+4^{1-T}}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{1+4^{1-T}}$$

$$4+4^{2-T}=5$$

$$4^{2-T}=1$$

Por definición tenemos:

$$2-T=0$$

$$T-2=0$$

$$\therefore\ T=2$$

Clave: B

Problema 151

Determine el máximo valor de «k», si:

$$\frac{\log xy\cdot\log xz\cdot\log yz}{\log x\cdot\log y\cdot\log z}\geq\log k$$

Donde: $\{x,y,x,k\}\subset\mathbb{R}^{+}-\langle 0;1]$

A) 10^6 B) 10^7 C) 10^8
D) 10^{10} E) 10^{12}

Resolución:

Recordemos que si $m,n,p\in\mathbb{R}^{+}$, se cumple: $(m+n)(m+p)(n+p)\geq 8mnp$

Ahora podemos plantear que:

$$(\log x+\log y)(\log x+\log z)(\log y+\log z)$$
$$\geq 8\log x\cdot\log y\cdot\log z$$

$$\log xy\cdot\log xz\cdot\log yz\geq 8\log x\cdot\log y\cdot\log z$$

Como log x, log y , log z > 0, tenemos:

$$\frac{\log xy\cdot\log xz\cdot\log yz}{\log x\cdot\log y\cdot\log z}\geq 8$$

Aqui reconocemos que: $\log k\leq 8$

Para el máximo valor: $\log k=8$

$$\therefore\ k=10^8$$

Clave: C

Problema 152

Sabiendo que si $x\in\mathbb{R}$ tal que: $2^{2^{-x}}=x$

Calcular:

$$E=\mathrm{Sgn}(x-1)+\left[\!\left[x+\frac{1}{2}\right]\!\right]$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Por condición tenemos:

$$2^{2^{-x}}=x$$

Tomando logaritmo tenemos:

$$\log_2 2^{2^{-x}}=\log_2 x$$

$$2^{-x}\cdot\log_2 2=\log_2 x$$

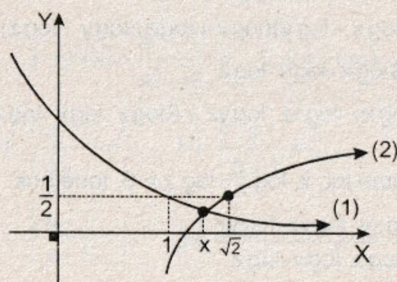
$$2^{-x}\cdot 1=\log_2 x$$

$$2^{-x}=\log_2 x$$

Formando el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y=2^{-x} & \ldots(1)\\ y=\log_2 x & \ldots(2)\end{cases}$$

Resolviendo gráficamente:



Fácilmente reconocemos que:

$$1 < x < \sqrt{2}$$

Ahora para la función signo:

$$1 < x < \sqrt{2}$$

$$0 < x-1 < \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow Sgn(x-1) = 1$$

También para el máximo entero:

$$1 < x < \sqrt{2}$$

$$\frac{3}{2} < x+\frac{1}{2} < \sqrt{2}+\frac{1}{2}$$

$$\left[\!\left[x+\frac{1}{2} \right]\!\right] = 1$$

Finalmente reemplazando tenemos:

$$E = 1+1$$

$$\therefore\ E = 2$$

***Clave:* B**

Problema 153

¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$x^3-7x^2+15x-9 = \frac{1}{Log_x\left(\frac{3}{5}\right)}\ ?$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) No tiene solución

Resolución:

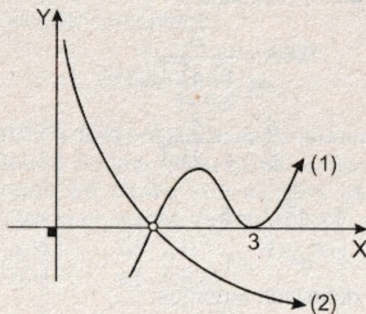
Factorizando al primer miembro y transformando al segundo miembro, la ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$(x-3)^2(x-1) = Log_{\left(\frac{3}{5}\right)} x\ ;\ x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Formando el sistema:

$$\begin{cases} y = (x-3)^2(x-1) & ...(1) \\ y = Log_{\left(\frac{3}{5}\right)} x & ...(2) \end{cases}$$

Graficando en el plano cartesiano



Como las gráficas de (1) y (2) no se intersectan en ningún punto, decimos que el sistema no tiene solució real.

***Clave:* E**

Problema 154

Determine el menor valor de «k» en:

$$\left[K-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|} \right](3^x+1) \geq 3^{x+1}+3$$

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

Resolución:

Transformando el segundo miembro, la inecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\left[K-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|} \right](3^x+1) \geq 3(3^x+1)$$



Como $3^x+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, podemos simplificar:

$$k-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|}\geq 3$$

$$k-3\geq\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|}\leq k-3$$

Como $0<\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|}\leq 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$:

$$k-3=1 \quad \therefore k=4$$

***Clave:* B**

Problema 155

Determine la suma de los tres primeros coeficientes de F(x) siendo:

$F(x)=\dfrac{x^2}{x-\log(x+1)}$, considere que:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...$$

A) $\frac{28}{9}$ B) $\frac{31}{9}$ C) $\frac{17}{9}$

D) $\frac{29}{9}$ E) $\frac{22}{9}$

Resolución:

$$F(x)=\frac{x^2}{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...\right)}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+...}$$

$$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{5}+...}$$

Supongamos que:

$$F(x)=a_0+a_1x+x+a_2x^2+...$$

Ahora se plantea:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{5}+...}$$

Efectuando la multiplicación:

$$\left(a_0+a_1x+a_2x^2+...\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{5}+...\right)\equiv 1$$

$$\frac{a_0}{2}+\left(\frac{a_0}{3}-\frac{a_1}{2}\right)x+\left(\frac{a_0}{4}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{2}\right)x^2+...\equiv 1$$

De acuerdo con la identidad, se cumple que:

$$\frac{a_0}{2}=1\wedge\frac{a_0}{3}-\frac{a_1}{2}=0\wedge\frac{a_0}{4}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{4}=0$$

$$a_0=2\wedge\frac{2}{3}-\frac{a_1}{2}=0 \quad\wedge\quad \frac{1}{2}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{4}=0$$

$$a_0=2\wedge a_1=\frac{4}{3} \quad\wedge\quad \frac{1}{2}-\frac{4}{9}+\frac{a}{2}=0$$

$$a_0=2\wedge a_1=\frac{4}{3} \quad\wedge\quad a_2=-\frac{1}{9}$$

Finalmente tenemos:

$$S=2+\frac{4}{3}-\frac{1}{9}$$

$$\therefore S=\frac{29}{9}$$

***Clave:* D**

Problema 156

Determine el rango de la función real de variable real, cuya fórmula es:

$$y=F(x)=2^x-2^{|x|}$$

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ C) $\mathbb{R}^+$

D) $\mathbb{R}^-\cup\{0\}$ E) $\mathbb{R}^-$

Resolución:
Redefiniendo la función tenemos:

$$y = F(x) = \begin{cases} 2^x - 2^x & ; x \geq 0 \\ 2^x - 2^{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y = F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \quad ....(F_1) \\ 2^x - 2^{-x} & ; x < 0 \quad ....(F_2) \end{cases}$$

Fácilmente reconocemos que:

$$\text{Ran}(F_1) = \{0\}$$

En F_2 podemos plantear que si $x < 0$

$$\Rightarrow \quad 2x < 0$$
$$x + x < 0$$
$$x < -x$$

En forma equivalente, tenemos:

$$2^x < 2^{-x}$$
$$2^x - 2^{-x} < 0$$

Aquí podemos reconocer que:

$$\text{Ran}(F_2) = \langle -\infty; 0 \rangle$$

Finalmente tenemos:

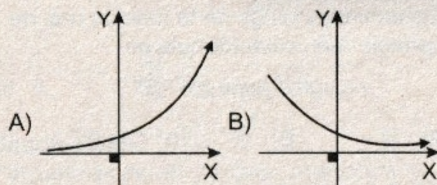
$$\text{Ran}(F) = \text{Ran}(F_1) \cup \text{Ran}(F_2)$$

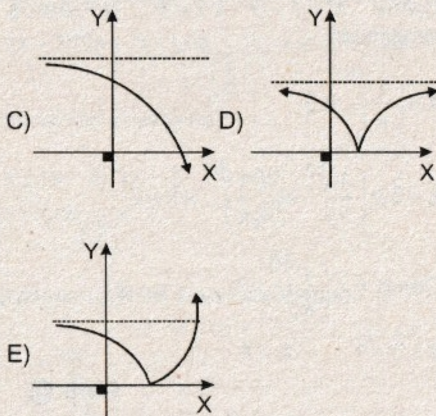
$$\therefore \text{Ran}(F) = \langle -\infty; 0]$$

***Clave:* D**

Problema 157
Esbozar la gráfica de la función F, donde.

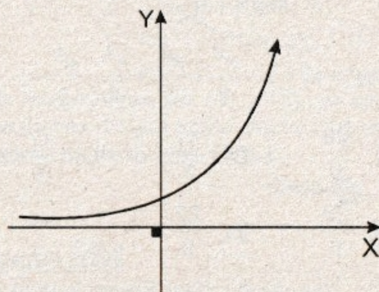
$$y = F(x) = |3 - 2^x|$$



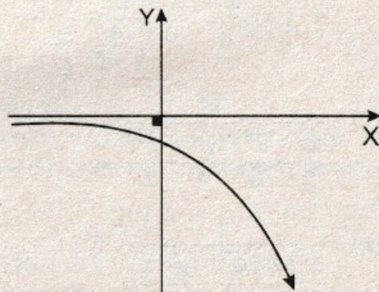


Resolución:
Graficando por partes, procedemos así:

I. $y = 2^x$

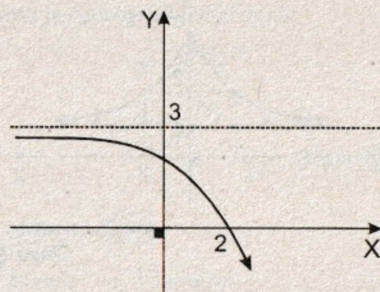


II. $y = -2^x$

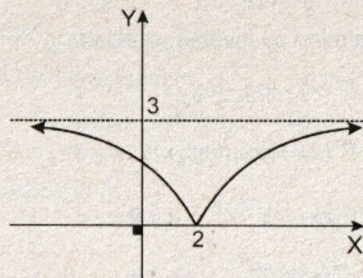




III. $y = 3 - 2^x$



Finalmente para $y = F(x) = |3 - 2^x|$

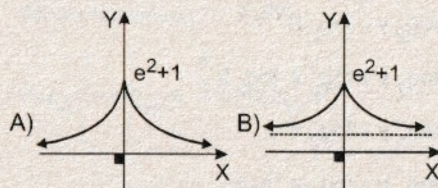


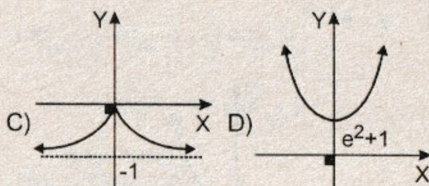
***Clave:* D**

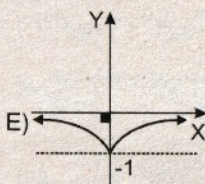
Problema 158

Esbozar la gráfica de la siguiente función:

$$y = F(x) = \left|e^{2-|x|} + 2\right| - 1$$







Resolución:

La función dada es:

$$y = F(x) = \left|e^{2-|x|} + 2\right| - 1$$

Como $e^{2-|x|} + 2 > 0$

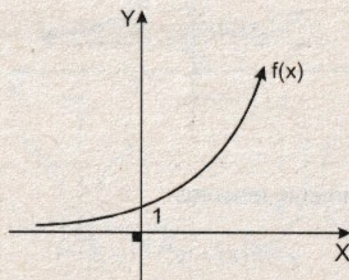
$$y = F(x) = e^{2-|x|} + 2 - 1$$

$$y = F(x) = e^{2-|x|} + 1$$

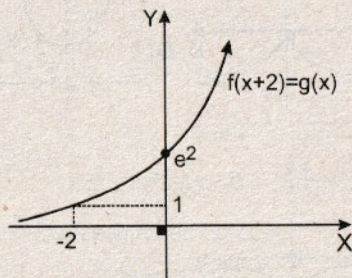
Fácilmente reconocemos que y = F(x) es una función par, luego podemos graficar la parte que corresponde a $x \geq 0$ y por reflejo de esta obtenemos la otra parte de la gráfica, siendo $x \geq 0$, tenemos:

$y = F(x) = e^{2-x} + 1$

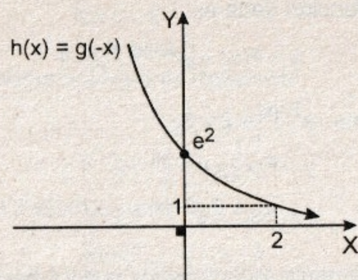
I. $y = e^x$



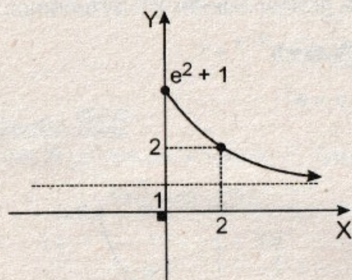
II. $y = e^{x+2}$



III. $y = e^{-x+2}$

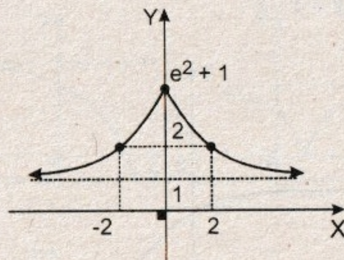


IV. $y = e^{2-x} + 1;\ x \geq 0$



Finalmente tenemos:

$$y = F(x) = \left|e^{2-|x|} + 2\right| - 1$$



***Clave:* B**

Problema 159

Dada la función:

$$y = F(x) = 2^{\log_3 x}\ ;\ x > 0$$

determine su inversa, si existe:

A) $F^*(x) = \log_3(\log_2 x)\ ;\ x > 2$

B) $F^*(x) = \log_2(\log_3 x)\ ;\ x > 3$

C) $F^*(x) = 3^{\log_2 x}\ ;\ x > 0$

D) $F^*(x) = 2^{e^{3x}}\ ;\ x > 0$

E) $F^*(x) = 2^{3^x}\ ;\ x > 0$

Resolución:

Fácilmente podemos reconocer que y = F(x) es inyectiva en x > 0, luego existe la función inversa.

De la regla de correspondencia:

$y = 2^{\log_3 x} > 0$

$\log_2 y = \log_2 2^{\log_3 x}$

$\log_2 y = \log_3 x \cdot \log_2 2$

$\log_2 y = \log_3 x \cdot 1$

$\log_2 y = \log_3 x$



Según la definicion tenemos:

$$x = 3^{\log_2 y}$$

Ahora la funcion inversa será:

$$y = 3^{\log_2 x}$$

$$\therefore\ F^*(x) = 3^{\log_2 x}\ ;\ x > 0$$

Clave: C

Problema 160

Si $a,b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ tal que:

$$\log_{ab}\left[\operatorname{colog}_{ab}\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right) + \frac{1}{2}\log_{(ab)} b\right]$$

$$= \log^2{}_{ab}\, a - \log^2{}_{ab}\, b$$

Se define la función

$$y = F(x) = \operatorname{antilog}_2 x + \log_4 x$$

Determine $F\left(\frac{b}{a}\right)$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{9}{2}$

D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

Resolución:

Observa que:

$$\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}$$

Ahora tenemos:

$$\log_{ab}\left[-\log_{ab} a^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log_{ab} b\right]$$

$$= \log^2{}_{ab}\, a - \log^2{}_{ab}\, b$$

$$\log_{ab}\left[\frac{1}{2}\log_{ab} a + \frac{1}{2}\log_{ab} b\right]$$

$$= \log^2{}_{ab}\, a - \log^2{}_{ab}\, b$$

$$\log\left[\frac{1}{2}\log_{(ab)}(ab)\right]$$

$$= (\log_{ab} a + \log_{ab} b)(\log_{ab} a - \log_{ab} b)$$

$$\log_{ab}\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\log_{(ab)}(ab)\right]\left[\log_{(ab)}\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$\log_{ab}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{(ab)}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

Finalmente tenemos:

$$F(x) = \operatorname{antilog}_2 x + \log_4 x$$

$$F(2) = \operatorname{antilog}_2 2 + \log_4 2$$

$$F(2) = 2^2 + \log_2 \sqrt{2}$$

$$F(2) = 4 + \frac{1}{2}$$

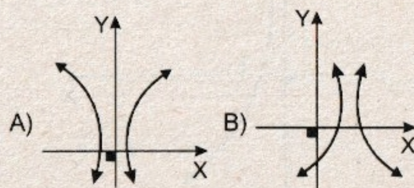
$$\therefore\ F(2) = \frac{9}{2}$$

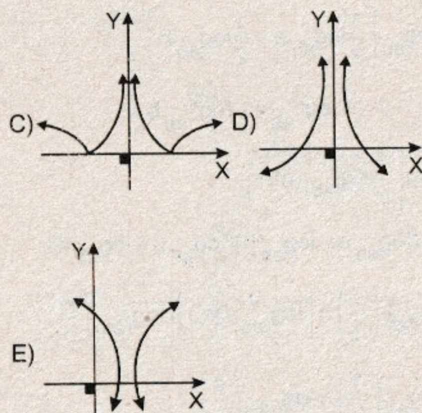
Clave: C

Problema 161

Esbozar la gráfica de la función:

$$y = F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{colog}_2(x^2)$$





Resolución:

Fácilmente reconocemos que y = F(x) es una función par, luego graficamos con x > 0 y esta gráfica la reflejamos a través del eje x para completar la gráfica de la función.

De la regla de correspondencia:

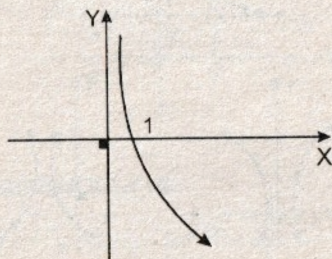
$$y = F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{colog}_2(x^2)$$

$$y = F(x) = \frac{1}{2}\left[-\log_2 x^2\right]$$

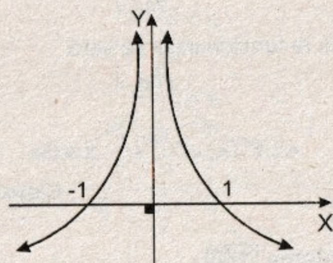
$$y = F(x) = \frac{1}{2}\left[-2\log_2 x\right]$$

$$y = F(x) = -\log_2 x$$

En el plano cartesiano:



Finalmente completando la gráfica



Clave: E

Problema 162

Si CS = $\langle m;\infty\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación:

$$(x-1)^{\sqrt{x-2}} < \sqrt[3]{(x-1)^{(x-2)}}$$

Calcular: m^2

A) 25 B) 49 C) 114
D) 121 E) 144

Resolución:

La inecuación dada es:

$$(x-1)^{\sqrt{x-2}} < (x-1)^{\frac{x-2}{3}}$$

Por existencia en $\mathbb{R}$:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

Observa que si x = 2, la desigualdad no se verifica, luego aceptamos que x > 2.

Así mismo notamos que:

$$x > 2 \Rightarrow x-1 > 1$$

Por tanto la inecuación será:

$$\sqrt{x-2} < \frac{x-2}{3}$$

$$3\sqrt{x-2} < x-2$$

$$9(x-2) < (x-2)^2$$

$$-(x-2)^2 + 9(x-2) < 0$$



$$(x-2)^2 - 9(x-2) > 0$$

$$(x-2)(x-11) > 0$$

De donde reconocemos que:

$$x < 2 \vee x > 11$$

Pero recordemos que x > 2:

$$x > 11 \Leftrightarrow CS = \langle 11;\infty \rangle$$

Finalmente reconocemos que:

$$m = 11$$

$$\therefore \ m^2 = 121$$

Clave: D

Problema 163

Resolver:

$$2^{\log x} < x^3$$

A) $\langle 1;\infty \rangle$ B) $\langle 0;1 \rangle$ C) $\langle 1;2 \rangle$
D) $\langle 2;4 \rangle$ E) $\langle 3;\infty \rangle$

Resolución:

Por existencia del logaritmo tenemos que $x > 0$.

En la ecuación dada:

$$2^{\log x} < x^3$$

$$\log 2^{\log x} < \log x^3$$

$$\log x \cdot \log 2 < 3\log x$$

$$\log x \cdot \log 2 - 3\log x < 0$$

$$\log x(\log 2 - 3) < 0$$

Fácilmente podemos reconocer que $\log 2 - 3 < 0$, luego:

$$\log x > 0$$

$$\log x > \log 1$$

$$x > 1$$

$$\therefore \ CS = \langle 1;\infty \rangle$$

Clave: A

Problema 164

Sea f: A → ℝ una función definida por:

$$f(x) = Ln[\log_{1/2}(5 - x^2)]$$

donde A = Dom(f) ⊂ ℝ. Entonces la cantidad de números enteros que posee el conjunto A es:

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución:

Por condición de existencia:

$$\log_{1/2}(5 - x^2) > 0$$

$$\log_{1/2}(5 - x^2) > \log_{1/2}(1)$$

Ahora se cumple que:

$$\underbrace{5 - x^2 > 0 \ \wedge \ 5 - x^2 < 1}$$

$$0 < 5 - x^2 < 1$$

$$4 < x^2 < 5$$

$$2 < |x| < \sqrt{5}$$

$$-\sqrt{5} < x < -2 \ \vee \ 2 < x < \sqrt{5}$$

Nótese que:

$$Dom(f) = \langle -\sqrt{5}\ ; -2 \rangle \cup \langle 2\ ; \sqrt{5} \rangle$$

El dominio de **f** no tiene elemento entero.

Clave: A

Problemas Propuestos

Problema 01

Calcular el logaritmo en base 16 del logaritmo de $2\sqrt{2}$ en base 8.

A) $-1/4$ B) 4 C) -4
D) 1/2 E) -8

Problema 02

Si $a^3b^3 = a+b$; $ab \neq 1 \wedge a+b>0$; hallar «x», de: $(a+b)^{\log_{ab} x} = 64$.

A) 1/2 B) 2 C) 8
D) 4 E) 6

Problema 03

Si: $a \otimes b = (\log_3 a)(\log_3 b)$

$a>0 \wedge b>0$, hallar: $E = 3^{5\otimes 9}$

A) 27 B) 45 C) 15
D) 25 E) 9

Problema 04

Resolver:

$$\frac{\log_7(x^2+9-5)}{\log_7 \sqrt[5]{x+4}} = 10$$

A) 9 B) 13 C) 21
D) 11 E) 15

Problema 05

Hallar «x» de:

$$3\log(2x) + 2\log x = \log\left(\frac{1}{4}\right)$$

A) 0,5 B) 1 C) -5
D) 2 E) $-1/2$

Problema 06

Si $a>b>c>1$, reducir:

$$E = \frac{\log_c a + 1}{\log_c b \cdot \log_b a^2c^2}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{ac}{b}$ C) abc
D) 1 E) 2

Problema 07

Dada la ecuación:

$$x\log 4 + \log(\log 3) = \log(\log 81)$$

El valor de «x» que la verifica es:

A) 6 B) 1 C) 8
D) 5 E) 4

Problema 08

Si log2 = a ; log3 = b, hallar el logaritmo de 5 en base 6 en términos de «a» y «b».

A) 1 B) $\frac{a+b}{a-b}$ C) $\frac{a+b}{ab}$
D) $\frac{1-a}{a+b}$ E) $\frac{a-1}{a+b}$

Problema 09

Si $10^a = 27$; $10^b = 15$, hallar log2, en términos de «a» y «b».

A) $\frac{1}{3}(a+3b-3)$ B) $\frac{1}{3}(3b-a+3)$
C) $\frac{1}{3}(a-3b+3)$ D) $\frac{1}{3}(a+3b+3)$
E) $\frac{1}{3}(3b-a-3)$

Problema 10

Calcular: $\sqrt[x]{x}$; si:

$$\log_7 5^{\log 7^{\log_5 x}} = \log\log_5 x^{-1}$$

A) 5^{-1} B) 7^{-1} C) $\sqrt[5]{7}^{-1}$

D) $\sqrt{5}^{-1}$ E) $\sqrt[5]{5}^{-1}$

Problema 11

Calcular:

$$E = \text{colog}_6 \text{antilog}_3(\log_3 12 + 1)$$

A) 1/2 B) 2 C) − 2

D) 1/4 E) − 1/2

Problema 12

Si:

$\text{antilog}_c \text{antilog}_a b = ab$; $a,b,c, \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$,

reducir:

$$E = \text{colog}_c a + \text{colog}_c b$$

A) 0 B) ab C) a^b

D) − ab E) $-a^b$

Problema 13

Calcular:

$$E = \left[\frac{1}{2+\log_3 5}\right]\left[\frac{1}{1-\log_{45} 9}\right]\left[\frac{\text{Ln}25}{\text{Ln}3}\right]$$

A) 2 B) 5 C) 1/2

D) 1/5 E) 1/10

Problema 14

En el sistema: $\log x - \log y = \log 2$

$$2^{x+y} = 64$$

El valor de «x» es:

A) 4 B) 8 C) 6

D) 2 E) 1/4

Problema 15

Resolver para «x»

$$\log_{\sqrt[b]{2}} x^a + \log_8 x^{ab} = 4b$$

A) $\sqrt[b]{2}$ B) $\sqrt[ab]{2}$ C) $\sqrt[a]{8}$

D) $\sqrt[b]{8}$ E) $\sqrt[ab]{8}$

Problema 16

Si $6^{\log_2 3} + 10^{\log x} = 3^{\log_2 6} + \log_{\sqrt{x}} x$

El valor de «x» es:

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Problema 17

Indicar la suma de los 999 primeros términos de la sucesión:

$$\log(1+1); \log\left(1+\frac{1}{2}\right); \log\left(1+\frac{1}{3}\right); \ldots$$

A) 1/2 B) 7 C) 3/2

D) 5 E) 3

Problema 18

Resolver:

$$9^{\log_9(x^2-5)} = 6x - 13$$

A) 2 B) 4 C) 8

D) 6 E) Más de una es correcta

Problema 19

Resolver la ecuación:

$$(\log x)^{\frac{\text{colog antilog } x}{\text{log log } x}} = 10^{-2}$$

A) $\{0\}$ B) $\{1\}$ C) $\{2\}$

D) $\{3\}$ E) $\{4\}$

Problema 20

Resolver:

$$\log_{\left(\frac{2}{5}\right)}(3x-2) > -2$$

A) $x \in \left\langle \frac{1}{3}; \frac{3}{4} \right\rangle$ B) $x \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{33}{4} \right\rangle$

C) $x \in \left\langle \frac{2}{3}; \frac{11}{4} \right\rangle$ D) $x \in \left\langle \frac{11}{4}; \infty \right\rangle$

E) $x \in \left\langle \frac{2}{3}; \infty \right\rangle$

Problema 21

Resolver:

$$\log_3\left(\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x-2)\right) > 0$$

A) $\langle 2;5 \rangle$ B) $\left\langle 2; \frac{5}{2} \right\rangle$ C) $\langle 1;2 \rangle$

D) $\langle 2;4 \rangle$ E) $\left\langle 1; \frac{5}{2} \right\rangle$

Problema 22

Resolver:

$$\log\left(1-\sqrt{x^2-1}\right) \geq 0$$

A) $\langle -1;1 \rangle$ B) $[-1;1]$

C) $\langle -\infty;-1] \cup [1;\infty \rangle$

D) $\{-1;1\}$ E) $\langle -\infty;-1 \rangle \cup \langle 1;\infty \rangle$

Problema 23

Resolver:

$$3(9^x) - 10(3^x) + 3 < 0$$

A) $x \in [-1;1]$ B) $x \in \langle 0;1 \rangle$

C) ϕ D) $x \in \langle -1;1 \rangle$

E) $x \in \mathbb{R}$

Problema 24

Resolver:

$$27^{x-1} - 9^{x-1} \leq 3^{x+1} - 3^x$$

A) $\langle -\infty;1]$ B) $[-2;1]$ C) $\langle -\infty;2]$

D) $[-1;1]$ E) $[-1;2]$

Problema 25

Resolver:

$$1 \geq \sqrt{5}^{x^2-3} \geq 25^{x-2}$$

A) $[-\sqrt{3};2]$ B) $[-\sqrt{2};3]$

C) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ D) $[-2;2]$

E) $[\sqrt{3};2]$

Problema 26

Resolver:

$$\pi^{\sqrt{4x-x^2+5-3}} < \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{x^{2-4x-5+2}}}$$

A) $x \in [-1;5]$ B) $x \in \{-1;5\}$

C) $x \in \mathbb{R} - \langle -1;5 \rangle$ D) $x \in \mathbb{R}$

E) $x \in -[-1;5]$

Problema 27

Resolver:

$$\log_x(x^2 - x) \geq 1$$

A) $\langle 1;\infty \rangle$ B) $[1;\infty \rangle$ C) $\langle 1;2]$

D) $[2;\infty \rangle$ E) $\langle 0;2]$



Problema 28

Resolver:

$$\log_x\left(\frac{x^2-x-6}{x+4}\right)\le 1$$

A) $\langle -1;4]$ B) $[5;\infty\rangle$ C) $\langle -1;2]$

D) $\langle 0;1\rangle$ E) $\langle 3;\infty\rangle$

Problema 29

Resolver:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}\right)\le -1$$

A) $\langle -\infty;2]\cup\left\langle\frac{11}{4};4\right]$ B) $[-2;4]-\left\{\frac{11}{4}\right\}$

C) $\left[2;\frac{11}{4}\right\rangle\cup[4;\infty\rangle$ D) $[2;\infty\rangle-\left\{\frac{11}{4}\right\}$

E) $[2;4]-\left\{\frac{11}{4}\right\}$

Problema 30

La gráfica de cierta función exponencial contiene al punto $P\left(\frac{3}{2},27\right)$.

Indicar la base y la regla de la función.

A) $b=3;3^{-x}$ B) $b=\frac{1}{9};\left(\frac{1}{9}\right)^{2x}$

C) $b=\frac{1}{3};\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ D) $b=3;\ 3^{\frac{1}{x}}$

E) $b=9;\ 9^x$

Problema 31

Obtener el dominio de la funciòn definida por.

$$F(x)=\text{Ln}\left(\text{Ln}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

A) $\langle -e;1\rangle$ B) $\langle -1;1\rangle$ C) $\langle -\infty;-1\rangle$

D) $\left\langle\frac{1}{e};1\right\rangle$ E) $\langle 1;+\infty\rangle$

Problema 32

Hallar el dominio y la regla de correspondencia de la inversa de:

$$F(x)=\frac{2^x}{1+2^x}$$

A) $\log_2\left(\frac{x}{x-1}\right);\ x\in\langle 0;1\rangle$

B) $\log_2\left(\frac{x}{x+1}\right);\ x\in\langle -1;0\rangle$

C) $\log_2\left(\frac{x}{1-x}\right);\ x\in\langle 0;1\rangle$

D) $\log_2\left(\frac{x+1}{x}\right);\ x\in\langle -1;0\rangle$

E) $\log_2\left(\frac{x-1}{2x}\right);\ x\in\langle 1;2\rangle$

Problema 33

Hallar el rango de la funciòn definida por:

$$F(x)=\text{Log}_{\frac{1}{4}}(x^2+16)$$

A) $\langle -\infty;4]$ B) $\langle -\infty;-2]$

C) $[-2;+\infty\rangle$ D) $[4;+\infty\rangle$

E) $[-2;+\infty\rangle$

Problema 34

Si $a > 1$; $0 < b < 1$, resolver el sistema adjunto:

$$\begin{cases} a^{x} > a^{3x-8} & ...(1) \\ b^{x^2} > b^{6x} & ...(2) \end{cases}$$

A) $x \in \langle -1;2 \rangle$ B) $x \in \langle -1;1 \rangle$

C) $x \in \langle 0;4 \rangle$ D) $x \in \langle 0;5 \rangle$

E) $x \in \langle -2;3 \rangle$

Problema 35

Si: $Z = 1 + i$; donde $i = \sqrt{-1}$, entonces no es un valor de Ln Z.

A) $\text{Ln}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$ B) $\text{Ln}\sqrt{2} + \frac{17\pi}{2}i$

C) $\text{Ln}\sqrt{2} + \frac{9\pi}{4}i$ D) $\text{Ln}\sqrt{2} + \frac{25\pi}{4}i$

E) $\text{Ln}\sqrt{2} + \frac{13\pi}{4}i$

Problema 36

Las estrellas se clasifican de acuerdo a categorías de brillo «m», llamadas magnitudes y flujo luminoso «L». A las estrellas más débiles (con flujo luminoso L_0), se les asigna 6. La relación entre la magnitud de brillo «m» y el flujo luminoso «L» está dado por la fórmula:

$$m = K_0 - \frac{5}{2}\log\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

Determinar «K_0» y «m», cuando:

$$L = 10^{0,8}L_0$$

A) $K_0 = 5 \wedge m = 6$

B) $K_0 = 6 \wedge m = 5$

C) $K_0 = 6 \wedge m = 6$

D) $K_0 = 6 \wedge m = 4$

E) $K_0 = 5 \wedge m = 7$

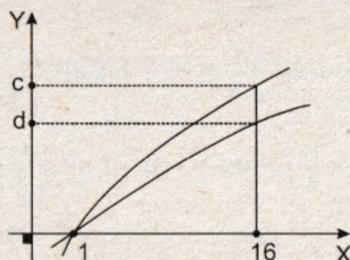
Problema 37

Si se grafica:

$F: R^+ \to R / y = F(x) = \log_4 x$

$H: R^+ \to R / y = H(x) = \log_{16} x$

Se obtiene:



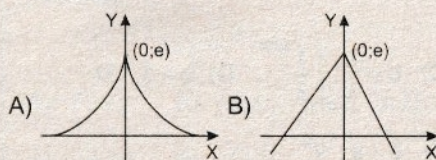
Calcular: $\frac{c}{d}$

A) 1/3 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 3

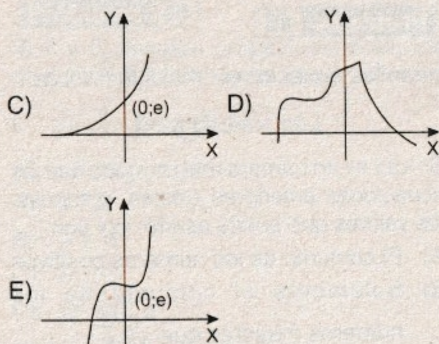
Problema 38

Obtener la gráfica de:

$$F(x) = e^{-x^2+1}$$



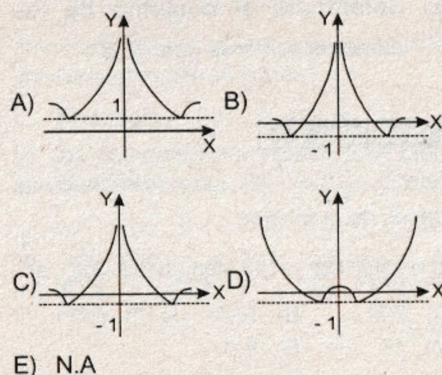




Problema 39

Hallar la gráfica de la función:

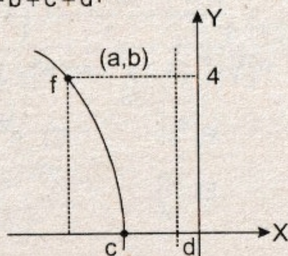
$$F(x)=|\ln|x||-1$$



E) N.A

Problema 40

En la figura adjunta, se muestra la gráfica de una función «f», definida por: $f(x)=\log_2(-x-3)$. Calcular el valor de: $T=a+b+c+d$:



A) -24 B) -22 C) -21
D) 21 E) 22

Problema 41

Si: f y g son dos funciones definidas por:

$$g(x)=3^{2-x}$$

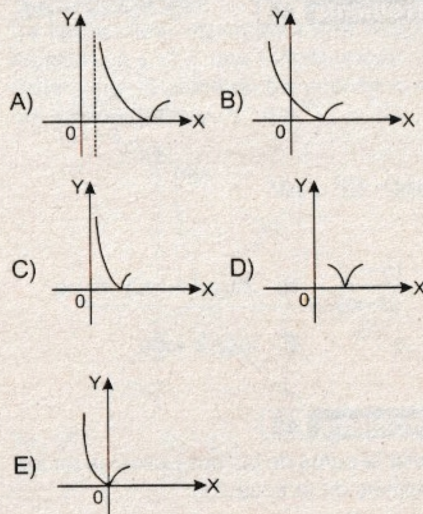
$F(x)=[g(3)]^x$, entonces; el conjunto: $A=\{x\in\mathbb{R}/f^*(x)>0\}$ es igual a:

A) $\langle 0;\infty\rangle$ B) $\langle 0;1\rangle$ C) $\langle -1;0\rangle$
D) $\langle 1;\infty\rangle$ E) $\mathbb{R}$

Problema 42

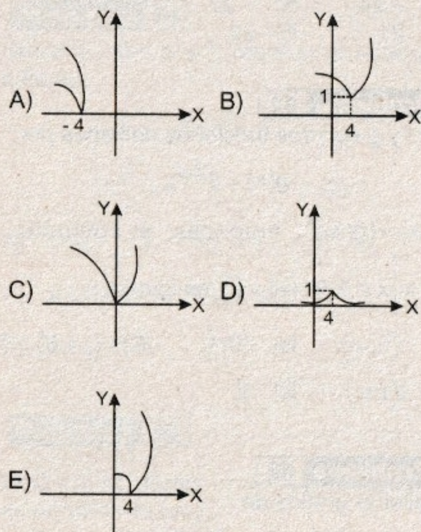
Hallar la gráfica de:

$$F(x)=|\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-3|$$



Problema 43

Si «f» es una función definida por: $f(x)=|\log_5(5-x)|+1$, entonces, la figura que mejor representa la gráfica de «f» es:



Problema 44

Si:

$$10^x + 10^y = p \; ; \; x - y = \log\left(\frac{p+q}{p-q}\right)$$

Hallar: $10^x - 10^y$

A) $\frac{(p+q)}{(p-q)}$ B) $2q$ C) $p-q$

D) q E) $\log p - \log q$

Problema 45

Hallar la suma de las dos primeras raíces positivas de la ecuación:

$$3\log(\mathrm{tg}\,x) + \log(\mathrm{sen}\,2x) = 0$$

Donde: $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

A) $5\pi/4$ B) 3π C) $3\pi/2$

D) $9\pi/4$ E) 2π

Problema 46

Sean las ecuaciones: $4x^2 - 5y^2 = 12a$

$$\mathrm{Log}_a x + \mathrm{Log}_a y = 1$$

Si: «a» es un número real de modo que las ecuaciones anteriores existan, entonces, los valores que puede asumir «x» son:

A) El conjunto de los números positivos
B) Solamente el conjunto de los números mayores que $\sqrt{0,5}$.
C) Solamente el conjunto de los números menores que 1.
D) El conjunto de los números positivos en el que se excluyen $\sqrt{0,5}$ y $\sqrt{2,5}$.
E) Solamente el conjunto de los números mayores que $\sqrt{2,5}$.

Problema 47

Sea: $a \in \langle 0; \infty \rangle - \{1\}$; luego la suma de las raíces de la función:

$$f(x) = (11 - \log_{a^x} a^3)(2 - \log_{a^x} a^5)(3 - \log_{a^x} a^9)$$

A) 7,5 B) 5 C) 6

D) 17 E) 8,5

Problema 48

Si $\log_a bc = x^n$, $\log_b ac = y^n$, $\log_c ab = z^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Calcular el valor de:

$$E = \frac{1}{n}\left[\sqrt[n]{\frac{1}{x^n+1} + \frac{1}{y^n+1} + \frac{1}{z^n+1}}\right]$$

A) $2n$ B) n C) n^2

D) $\frac{1}{n}$ E) $\frac{n}{2}$

Problema 49

Si A y B denotan respectivamente, los conjuntos solución de las desigualdades:

I. $\ln(x^2-1)\le\ln(1-x)$

II. $x^2-1\le 1-x$

A) $A=B$

B) $A\subset B$

C) $B\subset C$

D) $A\cap B=\phi$

E) $A\cap B=\phi\,;\,A\subset B\,;\,B\subset A$

Problema 50

Si «f» es una función definida por:

$$f(x)=\log_2(x+1)+\log_2(x-1)$$

entonces, indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. El $\operatorname{dom}(f)=\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\infty\rangle$

II. «f» es una función inyectiva en todo su dominio.

III. $F_{(x)}=\sqrt{1+x^2}$

A) VVV B) FVV C) FVF
D) FFF E) VVF

Problema 51

Calcular «x» en:

$$\sqrt[\log x]{x^{1-\ln x}}=e^5$$

A) $\left(\dfrac{10}{e^5}\right)^{\log e}$ B) $\left(\dfrac{10}{e}\right)^{5\log e}$

C) $\left(\dfrac{e}{10}\right)^{5\ln 10}$ D) $\left(\dfrac{10}{e^5}\right)^{\ln 10}$

E) $\left(\dfrac{e^5}{10}\right)^{\ln 10}$

Problema 52

Del sistema:

$$\begin{cases}\log x-\log 23=\log y+1 & \ldots(1)\\ (0{,}005134)^{2{,}29}\cdot\operatorname{antilog}(x-y)^2=1 & \ldots(2)\end{cases}$$

Determinar «x», si log51,34 = 1,710

A) 2,01 B) 2,19 C) 2,29
D) 2,30 E) 2,41

Problema 53

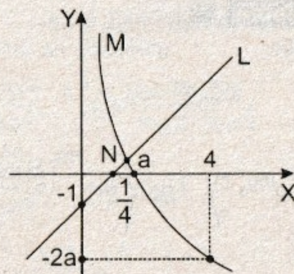
Siendo: x e y, positivos.
Determinar «x», del sistema:

$$\begin{cases}\log x-\log y=\sqrt[2{,}3026]{9} & \ldots.(1)\\ \operatorname{Log}_{xy}\operatorname{Log}_x\sqrt[x]{\log_x}=4 & \ldots.(2)\end{cases}$$

A) $5\vee 6$ B) $10\vee 5$ C) $4\vee 6$
D) $10\vee 6$ E) $10\vee 4$

Problema 54

La figura «M», representa una función logarítmica y «L», una función lineal.
Determinar la suma de las coordenadas del punto «N».



A) 3/2 B) 2/3 C) 1
D) 1/2 E) 2

Problema 55

Calcular:

$$\left[x^{-1}\cdot\log\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{\underline{|k}}\right)\right]^{\frac{\operatorname{antilog}3\log_{\sqrt{3}}2}{\log_2 0{,}4343}}$$

A) 256 B) 64 C) 16
D) 4 E) 2

Problema 56

Resolver:

$$\text{Ln}(e^2+e^{2-x}-1)\geq x\ ;\ x\in\mathbb{Z}^+$$

Indicando como respuesta el cardinal de su conjunto solución.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 10

Problema 57

Al sumar el número de cifras del resultado de efectuar $(324)^{50}$ con el número de ceros que representa entre la coma decimal y la primera cifra significativa del resultado de efectuar $(0{,}02)^{100}$, se obtiene:

A) 293 B) 294 C) 295
D) 296 E) 297

Problema 58

Resolver:

$$\log_3 x-\log_2 x>1$$

A) $\left\langle 0;2^{\log_3 2}\right\rangle$ B) $\left\langle 0;2^{\log_{\left(\frac{3}{2}\right)}3}\right\rangle$

C) $\left\langle 0;3^{\log_2 3}\right\rangle$ D) $\left\langle 0;3^{\log_{\left(\frac{2}{3}\right)}3}\right\rangle$

E) $\left\langle 0;2^{\log_{\left(\frac{2}{3}\right)}3}\right\rangle$

Problema 59

Resolver:

$$\log_x\left(\frac{12}{x}\right)-\ln e=\log_{(e+5)}\sqrt[3]{(e+5)^{-2}}+\text{co}\ln\sqrt[3]{e}$$

A) $\{1\}$ B) $\{12\}$ C) $\{19\}$
D) $\{7\}$ E) $\mathbb{R}^+$

Problema 60

Resolver:

$$\begin{cases} x-\log 6\leq \log 5-\log(1+2^x)\ ....(1)\\ \log(\sqrt{x^2-4x-1}+3)>0\ ....(2)\end{cases}$$

A) $\langle -\infty;1]$ B) $[2+\sqrt{5};\infty]$

C) $\langle -\infty;2-\sqrt{5}]$ D) $[2-\sqrt{5};1\rangle$

E) $\langle 1;2+\sqrt{5}]$

Problema 61

Identificar uno de los valores de «x», del sistema

$$\begin{cases} \log x^3-\ln y^4=1\ ....(1)\\ \log^2 x^2+\ln y^5=46\ ....(2)\end{cases}$$

A) $10^{-63/16}$ B) $10^{-54/17}$
C) $10^{-2/3}$ D) $10^{-81/64}$
E) 1

Problema 62

Resolver la ecuación:

$$x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$$

Hallar: $\sqrt[x+1]{x-1}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 8



Problema 63

Si x_1 y x_2, son dos soluciones de:

$$5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^x$$

Indicar: $J=\log_2(x_1x_2)$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 0

Problema 64

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 & ...(\alpha)\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 & ...(\beta)\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2 & ...(\gamma)\end{cases}$$

Hallar un valor para «x»

A) 3/2 B) 2/3 C) 4/5
D) 5/4 E) 1/3

Problema 65

Indicar el producto de todas las soluciones de:

$$1+\log_{(2x)}\left(\frac{x}{2}\right)=\log_2 x^{\mathrm{Log}_2 x}$$

A) 1/2 B) 3/2 C) 2
D) 4 E) $2\sqrt{2}$

Problema 66

Reconocer la menor solución de:

$$\frac{1}{5-4\log(x+1)}+\frac{5}{1+4\log(x+1)}=2$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) $\sqrt{10}+1$ E) $\sqrt{10}-1$

Problema 67

Después de resolver el sistema:

$$\mathrm{Log}_5 x+\mathrm{Log}_3 y=7\ ;\ x^y=5^{12}$$

Obtener la suma del mayor valor de «x» con el menor valor de «y».

A) 127 B) 129 C) 628
D) 132 E) 140

Problema 68

Calcular el valor de:

$$\log_2 3\cdot\log_6 3+\log_3 2\cdot\log_6 2-\log_3 6\cdot\log_2 6$$

A) −3 B) −1 C) 0
D) 1 E) 3

Problema 69

Resolver:

$$\begin{cases}\log_a x+\log_y b=3\\ \log_x a+\log_b y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Encontrar uno de los valores de «xy»

A) ab B) a^2b C) ab^2
D) a^3b^3 E) $\sqrt{ab}$

Problema 70

Resolver:

$$4^x=2(14^x)+3(49^x)$$

e indicar su solución.

A) $\dfrac{\log 3}{\log 7}$ B) $\dfrac{\log 7}{\log 3+\log 2}$

C) $\dfrac{\log 7}{\log 2}$ D) log 3

E) $\dfrac{\log 3}{\log 2-\log 7}$

Problema 71

Hallar la mayor solución:

$$\sqrt{1+\log x}=\log^2 x-1$$

A) $10\sqrt{10}$ B) $\sqrt{10}^{\sqrt{5}-1}$ C) $\sqrt[3]{10}$
D) $100\sqrt{10}$ E) $\sqrt{10}^{\sqrt{5}+1}$

Problema 72

Indicar el producto de todas las soluciones de:

$$\log(x^2-8)\cdot\log(2-x)=\frac{\ln(x^2-8)}{\ln(2-x)}$$

A) $-76/5$ B) 24 C) -9
D) $-171/10$ E) 72

Problema 73

Resolver:

$$(1{,}25)^{1-\log_2^2 x}<(0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$$

A) $x>5$

B) $0<x<1$

C) $x>3 \vee 0<z<2$

D) $x>32 \vee 0<z<1/2$

E) $x>5 \vee 1<x<1/32$

Problema 74

Hallar el campo de definición de:

$$H(x)=\sqrt[4]{\ln\sqrt{\ln\left[F\left[F\left[F(x+3)\right]\right]\right]}}$$

Siendo: $F(x) = x - 1$

A) $x>0$ B) $x\geq e^e$ C) $x\geq 1$

D) $x\in\mathbb{R}^+$ E) $x\geq e$

Problema 75

Dar el producto de las raíces de:

$$\log_{\left(\frac{1}{x}\right)}\left[e^3x^2\right]=e\log_{\left(\frac{1}{e}\right)}\left[e^2x^3\right] \text{ ; es:}$$

A) $e^{\frac{1-e}{2e}}$ B) $e^{\frac{e+1}{4e}}$ C) $e^{\frac{e-1}{5e}}$

D) $e^{\frac{2-2e}{3e}}$ E) $e^{\frac{4-e}{e^2}}$

Problema 76

Si: $x^{e^{\log_3 x}}=e^x$; $x>0$.

Calcular:

$$R=\frac{\ln(\ln\sqrt[x]{x})+x}{\log_3\left(\frac{3^x}{x}\right)}$$

A) -1 B) 1 C) 3
D) $-x$ E) e

Problema 77

Resolver:

$$x^{x+3(1-x^{-2})}=3$$

Luego calcular:

$$x^{x\sqrt[3]{9}}$$

A) 9 B) $3\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$

D) 3 E) $\sqrt{3}$

Problema 78

¿Qué valor asume «b» , en:?

$$\log_{bx}(bx^{-1})+\log_b^2 x=1$$

con la condición de que sus tres raíces formen una progresión aritmética?

A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

D) 4 E) 2

Problema 79

Resolver:

$$\frac{1}{\log_2 x}\leq\frac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$$

A) $x\in[1;0\rangle$

B) $x\in\langle 1;2\rangle\cup[3;+\infty\rangle$

C) $x\in[1;2]$



D) $x \in [1;3]$

E) $x \in \langle 0;1\rangle \cup [2;+\infty\rangle$

Problema 80

Resolver:

$$\log_{0,3}\sqrt{x+1} < \log_{0,3}\sqrt{4-x^2}+1$$

e indicar cuántos valores de «x» la verifican.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) Infinitos

Problema 81

Señalar el producto de las raíces:

$$2^{x^2} = x^{2^2}$$

A) 8 B) 2 C) − 2
D) 4 E) − 4

Problema 82

Determinar el producto del menor valor de «x», por el menor valor de «y» resultante de resolver el sistema:

$$\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \dfrac{8}{3} & ...(\alpha) \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 & ...(\beta) \end{cases}$$

A) 2 B) 1/4 C) 4
D) 1/2 E) 1

Problema 83

¿Cuál de los intervalor que se proporcionan, no forman parte del conjunto solución de:

$\log_{x^2}(2+x) < 1$?

A) $\langle 2;+\infty\rangle$ B) $\langle -1;0\rangle$ C) $\langle 1;2\rangle$
D) $\langle -2;-1\rangle$ E) $\langle 0;1\rangle$

Problema 84

Señalar el producto de las tres raíces de:

$$x^{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 4} = \left(\frac{x}{64}\right)$$

A) $4\sqrt{2}$ B) 4 C) 16
D) 8 E) 2

Problema 85

Hallar «x», en:

$$\sqrt{99}^{\,x(1+\text{Log}_{99}x)} = \sqrt[3]{66}$$

A) 1/3 B) 3/2 C) 2/3
D) 1/9 E) 1/27

Problema 86

Determinar «x», si el logaritmo de $x^{x^{x^n}}$, en base «b», es igual a: x^{n-x^n} y además: $b = x^{x^n}$.

A) n^{-n} B) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$ C) n^n
D) n E) $\sqrt[n]{n}$

Problema 87

Si se define una función cuya regla de correspondencia es:

$$F(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Hallar el equivalente de:

$$E = F(a) + F(b)$$

A) $F\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$ B) $F\left(\dfrac{2ab}{a-b}\right)$

C) $F\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ D) $F\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$

E) $F\left(\dfrac{a+b}{1+a^2}\right)$

Problema 88

Si $\sqrt[x^x]{x} = 10$. Calcular:

$$M = \log\left(\sqrt[\log x]{\log\left(\sqrt[\log x]{\log\left(\sqrt[\log x]{\log x}\right)}\right)}\right)$$

A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

Problema 89

Resolver:

$$\log^{\log\left(\frac{y}{x}\right)}\sqrt{x^y \cdot y^x} = z$$

Si 3 logy = 6 logx = 2 log z, indicar: xyz

A) 4 B) 16 C) 64
D) 1 E) 0

Problema 90

Si $0 < a^9 < a^6$, resolver:

$$\log_{a^3}(x-1)^2 < \log_{a^2}\left[(x-1)\sqrt[3]{3-x}\right]$$

A) $1 < x < 3$ B) $x < 3$ C) $2 < x < 3$
D) $0 < x < 1$ E) $x < 2$

Problema 91

¿Cuàntos ceros entre la coma decimal y la primera cifra significativa tiene el nùmero $(0{,}02)^{70}$?

A) 70 B) 140 C) 110
D) 118 E) 120

Problema 92

Calcular «b», si: $\log_b \sqrt[4]{125} = \frac{3}{2}$

A) 1/5 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$
D) 5 E) 25

Problema 93

Despejar «x» en:

$$a^{3-x}b^{5x-1} = a^{x+5}b^{3x+1}$$

A) $\frac{\log b + \log a}{\log b - \log a}$ B) $\frac{\log b - \log a}{\log b + \log a}$

C) $\frac{\log a + \log b}{2}$ D) $\frac{1}{\log b - \log a}$

E) $\frac{\log b - \log a}{3}$

Problema 94

Sean «x» $\wedge$ «y» números mayores que 1. Decir cuál o cuales de los siguientes enunciados es correcto.

1. $\sqrt{x} > y^2 \leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\ln x} > e^{2\ln y}$

2. $x > y \rightarrow e^x < e^{100y}$

3. $x > y^2 \leftrightarrow e^{\ln x} < e^{y^2}$

A) $1 \wedge 2$ B) $2 \wedge 3$ C) Sólo 1
D) $1 \wedge 3$ E) Sólo 2

Problema 95

Si log700 = 2,8451. Calcular: $\log_7 70$

A) 2,16 B) 2,15 C) 1,87
D) 2,18 E) 1,82

Problema 96

La suma de los cuadrados de dos números es 29 y la suma de sus logaritmos decimales es 1, luego dichos números son:

A) – 2 y – 5 B) 4 y 5 C) 2 y – 5
D) 2 y 5 E) 3 y 20

Problema 97

Hallar «x» de: $10^x + 10^{-x} = 3$

A) $\log\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$ B) $10^{3\pm\sqrt{5}}$

C) $\log\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) - \text{Log}10$

D) $\log\left(3\pm\sqrt{5}\right)^2$ E) $\text{Log}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

Problema 98

Si $\log_3 x = n\log_6 x \wedge \log_2 3 = m$

¿Cuál es el valor de «n» ?

A) 1 + m B) $\frac{1+m}{m}$ C) $\frac{1}{1+m}$

D) $\frac{m}{1+m}$ E) $\frac{m}{2}$

Problema 99

La suma de las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 25^{x^2} = \sqrt{5}^{y^2} & ....(1) \\ \ln x = 2\ln y & ....(2) \end{cases}$$

Es:

A) 1/2 B) 1/4 C) 1
D) 3/4 E) 5/4

Problema 100

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2\log_3 x + 2\log_3 y = 0 & ....(1) \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 & ....(2) \end{cases}$$

A) $(\pm 2; \pm 0,5)$ B) $\left(\frac{1}{2};2\right)$

C) $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ D) $\left(-\frac{1}{2};2\right)$

E) $\left(2;\frac{1}{4}\right)$

Problema 101

Si: x > 2, el equivalente de:

$\left[\log_x 100\right]\left[\log x\right]\left[\log_{(x+1)}(x+1)\right]$, es:

A) 2 B) 10 C) 1
D) 5 E) 8

Problema 102

La igualdad: $x = a^{\text{Log}_a x}$. Se cumple sí y sólo sí:

A) $a > 0 ; x \in \mathbb{R}$

B) $a > 1; x \in \mathbb{R}^*$

C) $a \neq 1; x > 0 \wedge a > 0$

D) $a \in \mathbb{R} - \{1\} ; x \in \mathbb{R}^*$

E) $a > 1; x > 0$

Problema 103

La suma de las soluciones de la ecuación:

$\log_4(2x^2 + 15x + 26) = 3$, es:

A) – 15/2 B) 17/2 C) 2
D) 13/2 E) N.A.

Problema 104

Si $a_k = \frac{k+1}{k}$. Calcular:

$$\log_b a_1 + \log_b a_2 + ... + \log_b a_{99}$$

Siendo $b = \sqrt[7]{10}^{\,4}$

A) 3 B) 2 C) 3,5
D) 4 E) 2,5

Problema 105

Para qué valores de «x» está definida la expresión:

$$\sqrt{\ln\sqrt{\ln x}}$$

A) $x \geq e^e$ B) $x \geq e^{2e}$ C) $x \geq 2e$

D) $x \geq e^2$ E) $x \geq e$

Problema 106

El logaritmo de «x» en base 5 es el mismo que el logaritmo de «y» en base $\sqrt{5}$, si:

$x+y=\dfrac{3}{4}$, calcular: $\dfrac{y}{x}$

A) 1/2 B) 1/4 C) 2

D) 1/8 E) 1/6

Problema 107

Calcular: $\sqrt[3]{\left|a^2-b\right|^{\log_2 25}}$; si se verifica:

$\log_{(a^2+b)} 2(a^4+b^2-4)=2$

A) 25 B) −2 C) 3

D) 4 E) 5

Problema 108

Hallar el dominio máximo de la función F:

$$F(x)=\ln\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+1\right]$$

A) $\langle -2;2\rangle$ B) $[-2;2]$

C) $\langle -\infty;-2\rangle \cup [2;\infty\rangle$

D) $\langle -\infty;1] \cup [4;\infty\rangle$

E) $\mathbb{R}$

Problema 109

La función inversa de:

$F(x)=\log_2(x-2)+\log_2(x+2)$ es:

A) $F^{-1}(x)=-x^2+4$

B) $F^{-1}(x)=\sqrt{x^2-4}$

C) $F^{-1}(x)=\sqrt{2^x-4}$

D) $F^{-1}(x)=-\sqrt{2^x+4}$

E) $F^{-1}(x)=\sqrt{2^x+4}$

Problema 110

Cuántos números naturales verifican:

$$\log_2(2x+4)<\log_2(5x+3)$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Problema 111

Hallar el dominio de F si:

$$F(x)=\log_{[\![x-\sqrt{x}]\!]}|x|$$

A) $\left\langle \dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\infty \right\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\infty \right\rangle$

C) $\left\langle \dfrac{\sqrt{5}}{2};\infty \right\rangle$ D) $\mathbb{R}^+$.

E) $\left\langle \dfrac{2+\sqrt{5}}{2};\infty \right\rangle$

Problema 112

En base diez el doble de logaritmo de «n» excede en una unidad al logaritmo del número «n» que se obtiene aumentando los $\dfrac{11}{10}$ a «n».



Hallar la suma de las cifras de «n»

A) 3 B) 8 C) 5
D) 6 E) 11

Problema 113

Resolver: $\log_{(05)}{(x-4)} > -2$

A) $\langle 4;8\rangle$ B) $\langle 0;8\rangle$ C) $\langle 0;4\rangle$
D) $\langle 4;\infty\rangle$ E) $\langle 8;\infty\rangle$

Problema 114

Halle «x» de:

$$\frac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1$$

A) 5 B) 3 C) -5
D) 2 E) 12

Problema 115

Calcular $\sqrt{y}$ del sistema:

$$\begin{cases} 2^x-\sqrt{y}=0 & \text{....(1)} \\ x^2+5(5-\log_2 y)=0 & \text{....(2)} \end{cases}$$

A) 1 024 B) 16 C) 512
D) 4 E) 32

Problema 116

Al resolver la ecuación:

$$\left[\log_{(3x)}4\right]\left[\log_4 x\right]\left[\log_x 27x^3\right]=3$$

Se obtiene como conjunto solución:

A) $\mathbb{R}$ B) $\{3\}$
C) $[0;\infty\rangle$ D) $\langle 0;\infty\rangle-\{1/3\}$
E) $\langle 0;\infty\rangle-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$

Problema 117

Resolver:

$$\log\log\log x=0$$

A) 1 B) 10^5 C) 5^{10}
D) 100^5 E) 100^2

Problema 118

Hallar «x» de:

$$x^{\left(\frac{\log_a(\log_a x)}{\log_a x}\right)}+b=0$$

A) ab B) a^{-b} C) a^b
D) b^a E) b^{-a}

Problema 119

Determine el valor de x:

$$2(2^{\log_5 x})=\text{antilog}(3\log 2)$$

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 25
D) 1/5 E) 1/25

Problema 120

La suma de las raíces de:

$\log_7(x-2)+\log_7(x-5)=2\log_7 2$ es:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 1

Problema 121

Hallar el producto de las raíces de la ecuación $m\log_x 4=n\log_4 x$ siendo «m» y «n» diferentes de cero.

A) 0 B) 1 C) 2m
D) $\frac{n}{m}$ E) $\frac{m}{n}$

Problema 122

Resolver:

$$\frac{4\log_3 x-(\log_x 3)^{-1}}{\log_3 x}=243\log_x 3$$

A) 80^3 B) 3^{27} C) 3^{81}

D) 3^{80} E) 81^3

Problema 123

Si $\log_3 5=a$; entonces $\log_{15} 81$ es:

A) $4(a+1)^{-1}$ B) $2(a+1)^{-1}$

C) $(a+4)^{-1}$ D) $3(a+2)^2$

E) $4(a+2)^{-1}$

Problema 124

Resolver:

$$\log_{(2x)}(0{,}25)+\log_{\left(\frac{x}{8}\right)}2+\log_{(8x)}2=0$$

A) 2^{-6} B) 2^{-7} C) 2^{-8}

D) 2^{-9} E) 2^{-10}

Problema 125

Resolver:

$$\log_{(0{,}5x)}2-\log_x 2>1$$

A) $\langle-\infty;2\rangle\cup\langle3;\infty\rangle$ B) $\langle0;2\rangle\cup\langle2;\infty\rangle$

C) $\mathbb{R}-\{1\}$ D) $\langle0;1\rangle\cup\langle3;\infty\rangle$

E) N.A.

Problema 126

Indicar uno de los intervalos solución de:

$$x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>\frac{1}{x}$$

A) $\langle0;1\rangle$ B) $\langle1;5\rangle$

C) $\langle-1;1/2\rangle$ D) $\langle1/8;1/2\rangle$

E) $\langle0;1/8\rangle$

Problema 127

Si $\log_{\sqrt[3]{x}} 2^{-\sqrt{2}}=\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}}$

Calcular: $\log_{\sqrt[2]{2}} x$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 4

D) -4 E) N.A.

Problema 128

Si $\log_b \sqrt[3]{\left[b\left(\sqrt{b+1}+1\right)\right]^2}=0{,}5$

Calcular:

$$\log_b \sqrt[7]{\left[b\left(\sqrt{b+1}-1\right)\right]^3}$$

A) 22/23 B) 24/25 C) 25/26

D) 26/27 E) 27/28

Problema 129

Para qué valores de «a» se define la siguiente ecuación:

$$x^2-4x-\log_2 a=0$$

A) $a>\frac{1}{16}$ B) $a\geq\frac{1}{16}$ C) $a<\frac{1}{16}$

D) $a\leq\frac{1}{16}$ E) $x\geq1$

Problema 130

Determine x en:

$$\sqrt{\log_2 x^4}+4\log 4\sqrt{\frac{2}{x}}=2$$

A) 3 B) 6 C) 9

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Problema 131

Calcular la suma de los valores de «x» en la ecuación:

$$(\log_x 2)(\log_{\left(\frac{x}{16}\right)} 2) = \log_{\left(\frac{x}{64}\right)} 2$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 12 E) 20

Problema 132

Resolver:

$$3\left[\log_2 \text{Sen}(x)\right]^2 + \log_2\left[1-\text{Cos}(2x)\right] = 2$$

A) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$ B) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

C) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$ D) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

E) $(1)^k \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Problema 133

Resolver:

$$\log_{(0;5)} x + \log_3 x > 1$$

A) $0 < x < 1$

B) $0 < x < 3^{\log 3/2}$

C) $0 < x < 3^{\log(2/3)^2}$

D) $2 < x < 3^{\log 2}$

E) $1 < x < 4$

Problema 134

Calcular log y si:

$$y = \log_{\sqrt{2}} \text{antilog}_{\sqrt[4]{2}}\, \text{colog}_{\sqrt[6]{2}}\, 8$$

A) $-3\log 3$ B) $2\log 3$
C) $-2\log 3$ D) $3\log 2$
E) No existe en $\mathbb{R}$

Problema 135

Si $x > 0$ tal que: $x^{e^{\log_2 x}} = e^x$

Calcular el valor de: $\dfrac{\ln\left(\ln\sqrt[x]{x} - x\right)}{\text{colog}_2\left(\dfrac{x}{2^x}\right)}$

A) -1 B) x C) 0
D) e E) 1

Problema 136

Resolver:

$$\sqrt{\text{colog}\, x} + \log\sqrt{x} = 0{,}5$$

A) 10 B) 1 C) 0,1
D) 0,01 E) -1

Problema 137

Mostrar el equivalente de:

$$\left[\frac{\sum_{k=2}^{n} \sqrt[n]{\text{Ln}k}}{\sum_{k=2}^{n} \sqrt[2]{\log k}}\right]^n$$

A) 0,4343 B) 2,3026 C) 2,7183
D) 10 E) e^2

Problema 138

Halle el dominio de la función:

$$F(x) = \log_{(4x-3)}(3-2x)$$

A) $\left\langle \frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right\rangle - \{1\}$

C) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right\rangle - \{1\}$

E) $\left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle$

Problema 139

Calcular: $x^2 + x + 1$ si:

$$\log_{\left(\frac{5x}{2}\right)}\left(\frac{x}{10}\right) + \log_5^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

A) 13 B) 31 C) 43
D) 111 E) 17

Problema 140

Resolver:

$$(\ln x)^{(\ln \sqrt[k]{x})} < 1 \ ; \ \forall x < 1$$

A) $\langle -\infty; e\rangle$ B) $\langle -\infty; \sqrt[e]{e}\rangle$
C) $\langle \sqrt[e]{e}\ ; \infty\rangle$ D) $\langle 1; \sqrt[e]{e}\rangle$
E) $\langle e\ ; 3\rangle$

Problema 141

Resolver: $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$

A) $\langle 1/10\ ; 1/4\rangle \cup \langle 5\ ; \infty\rangle$
B) $\langle 2/5\ ; 1/4\rangle \cup \langle 6\ ; \infty\rangle$
C) $\langle 0\ ; 1/4\rangle \cup \langle 4\ ; \infty\rangle$
D) $\langle 0{,}1; 0{,}2\rangle$
E) $\langle 1; 3\rangle$

Problema 142

Un capital «c» colocado a intereses compuesto con capitalización semestra de interes, se cuadruplica en 2 años. ¿En cuántos años más el capital será 8 c?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Problema 143

Indicar verdadero (V) o falso (F):

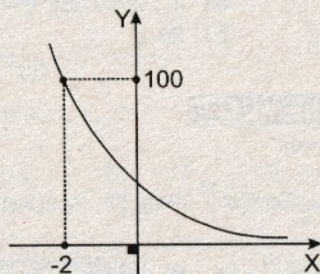
I. $\log_{0,3} 2 > 0$ II. $\log_{0,5} 0{,}4 < 0$

III. $\log\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ IV. $\log_e 4 < 0$

A) FFVF B) VVFV C) FVVF
D) VVVF E) FFFV

Problema 144

Si F(x) es una función exponencial cuya gráfica se muestra, determinar F(–3)



A) 1 000 B) 10^{-3} C) 100
D) 10^{-2} E) 10 000

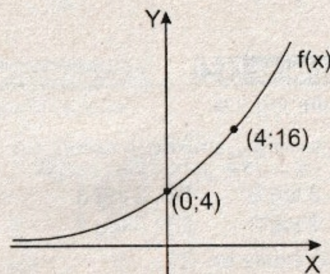
Problema 145

Sea la función $F(x) = a^{3x^2-x-2}$ tal que $0 < a < 1$ para que sea F(x) < 0 es necesario que «x»:

A) $-1/3 < x < 2$ B) $x < 2$
C) $x > 2$ D) No existe tal x
E) $x < -1/3$

Problema 146

La función $f(x) = 2^{mx+b}$ puede representarse tal como se muestra en la figura.





Halle el valor de m + b

A) 1 B) 2 C) 2,5

D) 3 E) 4

Problema 147

Sea f la función definida por:

$$f(x) = e^{x^2 - 2|x|} \; ; -1 < x \leq 3$$

Si el rango de f es [a ; b], halle el valor de

$T = ab \cdot e^{-2}$.

A) 1 B) 2 C) 3

D) E E) e^2

Problema 148

Halle el dominio de:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{e^x - 1}}{\sqrt{1 + 2e^x}}}$$

A) $[0;1]$ B) $[0;Ln2]$ C) $\langle 1;Ln2]$

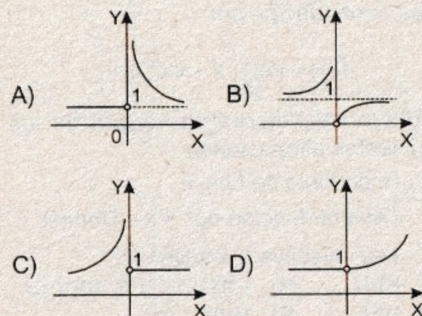
D) $[Ln2;\infty\rangle$ E) $\langle 0;Ln2]$

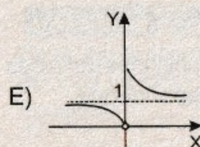
Problema 149 Seminario CEPRE - UNI

Sea f una función definida por:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} + \left|\frac{1}{x}\right|}$$

defina el dominio de f y determine la figura que mejor representa la gráfica de la función f.

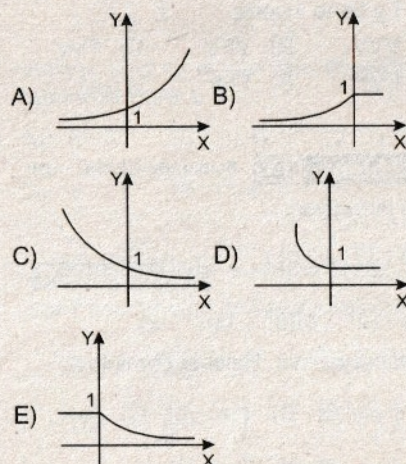




Problema 150 Seminario CEPRE - UNI

Señale la figura que mejor representa la gráfica de f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{3^{x+|x|}}, \; x \in \mathbb{R}$$



Problema 151 Seminario CEPRE - UNI

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / (3^{9(x)}) = 3x$

f es biyectiva, $g(x) = \frac{1}{5}x + 2$

Determine la $f^*(x)$

A) $f^*(x) = 3^{\frac{1}{15}x}$ B) $f^*(x) = 9^{\frac{1}{15}x}$

C) $f^*(x) = 3^{\frac{1}{5}x}$ D) $f^*(x) = 9(3^{\frac{1}{15}x})$

E) $f^*(x) = 8^{\frac{1}{15}x}$

Problema 152 Seminario CEPRE - UNI

Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones definidas por las reglas de correspondencia:

$f(x)=a^x+a^{-x}$, $a>1$

$g(x)=a^x-a^{-x}$, $a>1$

Decir el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

I. f tiene inversa
II. g tiene inversa
III. f.g tiene inversa

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) FFF

Problema 153 Seminario CEPRE - UNI

Sea la función:

$f:A\to\langle-\infty;0]$ /

$f(x)=(2^x-4)(3^x+1)(4^x-x)$

es sobreyectiva. Halle el dominio A.

A) $\langle-\infty;0]$ B) $\langle-\infty;3]$ C) $\langle-\infty;1]$
D) $\langle-\infty;4]$ E) $\langle-\infty;2]$

Problema 154 Seminario CEPRE - UNI

La masa del estroncio 90 (en kg) se relaciona con el tiempo (años) por la fórmula: $mt=ka^{-t}$, $k,a\in\mathbb{R}^+$; siendo su vida media 25 años; es decir que en este tiempo se desintegrará la mitad de la cantidad inicial. Si una muestra de estroncio 90 tiene inicialmente una masa de 24 kg.

¿Cuánta masa (en kg) quedará después de 50 años?

A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

Problema 155 Seminario CEPRE - UNI

Sea: $f(x)=\sqrt{2^x-16}+\sqrt{x^x-27}$, halle el dominio de **f**.

A) $[4;+\infty\rangle$ B) $\mathbb{R}$ C) $[-3;3]$
D) ϕ E) $[5;+\infty\rangle$

Problema 156 Seminario CEPRE - UNI

Sea la función **f** definida por

$f(x)=\log_{0,5}(e^x-3\sqrt{e^x-1}+1)$

$a\,x\in\left\langle \ln5;\ln\left(4+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\right]$

Halle el rango de la función **f**.

A) $\langle-\infty;1\rangle$ B) $\langle-\infty;1]$ C) $[1;\infty\rangle$
D) $\langle1;\infty\rangle$ E) $\langle0;\infty\rangle$

Problema 157 Seminario CEPRE - UNI

$f(x)=\sqrt{\log_4 x-1}+\sqrt{3^x-\log_3 x}$

Determine en Dom(f)

A) $[4;+\infty\rangle$ B) $\langle-2;2\rangle$ C) $[-2;2]$
D) $\langle4;+\infty\rangle$ E) $\mathbb{R}$

Problema 158 Seminario CEPRE - UNI

Sea f una función por:

$f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Indique los valores de verdad de las siguientes afirmaciones:

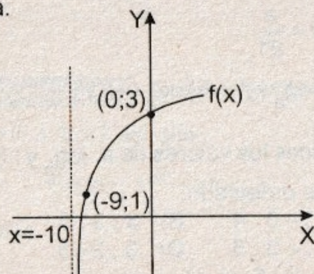
I. El dominio de f es $\mathbb{R}$
II. f es una función par $\forall x\in \text{Dom}(f)$
III. f es inyectiva $\forall x\in \text{Dom}(f)$

A) FVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) VVV



Problema 159 Seminario CEPRE - UNI

La función: f(x) = a log(x + b) + c puede representarse tal como se muestra en la figura.



Halle el valor de a + b + c

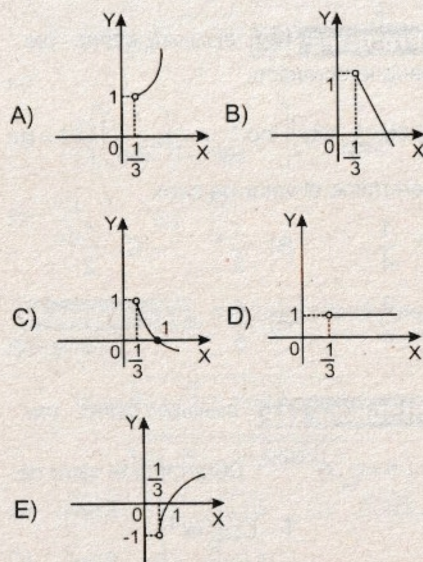
A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

Problema 160 Seminario CEPRE - UNI

La figura que mejor representa a la gráfica de la función.

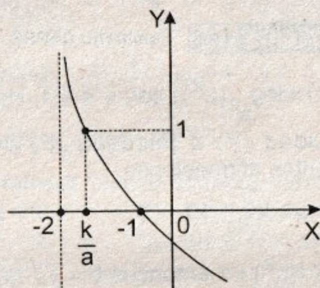
$$f(x)=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{3x-1}{3}\right)+\log_3\sqrt{9x^2-6x+1}$$

es:



Problema 161 Seminario CEPRE - UNI

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función logarítmica de base a trasladada.



Indique cual es el intervalo de variación admisible para k.

A) $\langle 0;1\rangle$ B) $[0;1\rangle$ C) $[a;1\rangle$
D) ϕ E) $\langle 1;a\rangle$

Problema 162 Seminario CEPRE - UNI

Sea f una función definida mediante:

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(x-1) & ,\ 3\le x\le 9\\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & ,\ 1\le x<3\\ -1+\sqrt{x(2-x)} & ,\ 0\le x<1\end{cases}$$

Halle el Ram(f)

A) ϕ B) $\langle -1;3\rangle$ C) $\langle 1;3]$
D) $[-1;3\rangle$ E) $[-1;3]$

Problema 163 Seminario CEPRE - UNI

Si $f(x)=\log_2(\log_3 x), x>3$, determine f^* indicando su dominio.

A) $f^*(x)=3^{2x}$; $x\in\mathbb{R}$

B) $f^*(x)=2^{3x}$; $x\in\mathbb{R}$

C) $f^*(x)=2^{(3^x)}$; $x\in\mathbb{R}$

D) $f^*(x)=3^{(2^x)}$; $x \in \mathbb{R}^+$

E) $f^*(x)=9^x$; $x \in \mathbb{R}/\{0\}$

Problema 164 Seminario CEPRE - UNI

Si $f(x)=\log_{a^2}(x^2)$, con $a<-1$. Halle la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones.

I. $f(x)=\log_a|x|$

II. Si $f(b^2)=1$ entonces $b=\pm\sqrt{-a}$

III. f es inyectiva

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FFF

Problema 165 Seminario CEPRE - UNI

Sea la función f, definida mediante:

$$f(x)=\log_3(x+1)+\log_3(x-1)$$

Halle la inversa f^* indicando su dominio

A) $f^*(x)=\sqrt{3^x+1}$, $x>0$

B) $f^*(x)=-\sqrt{3^x+1}$, $x>0$

C) $f^*(x)=\sqrt{3^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$

D) $f^*(x)=-\sqrt{3^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$

E) $f^*(x)=-\sqrt{3^x-1}$, $x>0$

Problema 166 Seminario CEPRE - UNI

Sean $A=\log_{12}18$ y $B=\log_{24}54$, halle el valor de:

$$T=A\cdot B+5(A-B)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Problema 167 Seminario CEPRE - UNI

Si: $\begin{cases} x=81a \\ y=\dfrac{a}{81} \\ (\log_a x)^2+6(\log_a y)=7 \end{cases}$

Entonces los valores de a; $\log_a y$; $\log_a x$ en ese orden son:

A) 3 ; –3 ; 4 B) 3 ; 3 ; 5
C) 3 ; –3 ; 5 D) 3 ; 2 ; 5
E) 3 ; 3 ; 6

Problema 168 Seminario CEPRE - UNI

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \ln(xyz)=ab+bc+ca \\ x^a=y^b=z^c \end{cases}$$

Determine el valor de $\log_x y$.

A) ac^{-1} B) bc^{-1} C) ab^{-1}
D) ca^{-1} E) cb^{-1}

Problema 169 Seminario CEPRE - UNI

Dada la ecuación:

$$\left[\log_{\text{senx}}(2)\right]\left[\log_{\text{sen}^2(x)}\left(\frac{1}{256}\right)\right]+1=0$$

Determine el valor de senx

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

Problema 170 Seminario CEPRE - UNI

Si $(\pi\text{Log}_\pi x)^{\text{Log}_\pi x}$. Determine el valor de:

$$T=\text{Log}_\pi(x^\pi)$$



A) π^{π} B) π^2 C) 2π

D) π E) $\frac{\pi}{2}$

Problema 171 Seminario CEPRE - UNI

Si $a>1 \wedge b>1$, tal que:

$$1+(\log_b a)^2 = x\log_b a$$

Calcule:

$$T=\frac{32x(x^2-3)}{(\log_b a^2)^3+(\log_a b^2)^3}$$

A) 0,25 B) 2 C) 4

D) 8 E) 16

Problema 172 Seminario CEPRE - UNI

Si:

$$\frac{\log_p(n)+n}{m^3}=\frac{\log_p(m)-m}{n^3}=\frac{3}{m^4+n^4}$$

entonces halle el valor de:

$$m=\log_{\sqrt[3]{p}}(n^m\cdot m^n)+\log_{n^m m^n}(p^5)$$

es:

A) $-\frac{34}{15}$ B) $-\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{34}{15}$ E) $\frac{32}{3}$

Problema 173 Seminario CEPRE - UNI

Simplificar:

$$M=\sqrt{\log\sqrt{6}+\sqrt{\log 2\cdot\log 3}}+\sqrt{\log\sqrt{6}-\sqrt{\log 2\cdot\log 3}}$$

A) $\sqrt{\log 2}$ B) $\sqrt{\log 6}$ C) $\sqrt{\log 3}$

D) $\sqrt{\log 9}$ E) $\sqrt{\log 4}$

Problema 174 Seminario CEPRE - UNI

Sean R y T dos cantidades definidas por:

$$R=\log_3(5^{\log_5 81})+9^{\log_3 5}+\log_{\sqrt{23}}(\sqrt[4]{23})$$

$$T=\operatorname{colog}_{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{0,\hat{3}}\right)\cdot\log_9\left(4^{32}\right)+\operatorname{antilog}_5(\log 9)\cdot 4^{\log 3}$$

Determine la relación correcta entre R y T.

A) R = T B) 2R – T = 34

C) T > R D) 4R + 3T = 190

E) R = 2T

Problema 175 Seminario CEPRE - UNI

Resolver la ecuación exponencial

$$4^{x^2+0,5}-3^{x^2-0,5}=3^{x^2+0,5}$$

luego, determine el cociente de las soluciones.

A) – 2 B) – 1 C) – 0,5

D) 1 E) 2

Problema 176 Seminario CEPRE - UNI

Si $\left\{\frac{1}{a}\right\}$ es el conjunto solución de la ecuación $4^x+\frac{5}{2}-\frac{9}{2^{2x}}=0$ entonces el valor de $\frac{a^6+13}{7}$ es:

A) 2 B) 5 C) 7

D) 8 E) 11

Problema 177 Seminario CEPRE - UNI

Halle la suma de raíces de la ecuación:

$$\text{lox}+2\log x^2+3\log x^3+\ldots+x\log x^x=(2x+21)\log x^{2x+1}$$

A) 16 B) 17 C) 18

D) 19 E) 20

Problema 178 Seminario CEPRE - UNI

Resolver la ecuación logarítmica

$$\log_x(4+3x^{\log_2 x})=2\log_2(x)$$

y luego, determine el producto de sus raíces.

A) $2^{-\sqrt{2}}$ B) $2^{\sqrt{2}}$ C) $2^{2\sqrt{2}}$
D) 1 E) 2

Problema 179 Seminario CEPRE - UNI

Resolver la ecuación en «x»

$$3^{1+\log(\cot x)}-3^{1+\log(\tan x)}+8=0$$

A) 2tan(5) B) 10
C) arc tan (10) D) 25
E) arc tan (25)

Problema 180 Seminario CEPRE - UNI

Determine el valor de:

$$E=\frac{\sqrt[3]{(x-4)^2}}{\sqrt[3]{(x^2+19)}}$$

Si x verifica la condición:

$$8=\left[\log\left(\frac{x^5}{9}\right)\right]^{\log_x\left(\frac{243}{x}\right)}$$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

Problema 181 Seminario CEPRE - UNI

Sea el conjunto A determinado por:

$$A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|\log_2|x||-|-x^2+5|=0\}$$

Halle el cardinal del conjunto A

A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

Problema 182 Seminario CEPRE - UNI

Si $\langle-\infty;a\ln(b+c)]$ es el conjunto solución de la inecuación exponencial:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Determine el valor de a.b.c

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 1

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Problema 183 Seminario CEPRE - UNI

Si: x > 1, y > 1, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\sqrt{x}>y^2$ si y solo si $e^{\ln x}<e^{4\ln y}$

II. Si x > y entonces $e^x<e^{100y}$

III. $x>y^2$ si y solo si $e^{\ln x}>e^{y^2}$

A) VVV B) VFF C) FVV
D) FVF E) FFF

Problema 184 Seminario CEPRE - UNI

Halle el conjunto solución de la inecuación:

$a^{x^2-1}<b^{x^2-1}$, si a < b y $\{a,b\}\subset\mathbb{R}^+/\{1\}$

A) $\langle1;+\infty\rangle$ B) $[2;+\infty\rangle$

C) $\langle-\infty;-1\rangle$ D) ϕ

E) $[-1;1]^c$

Problema 185 Seminario CEPRE - UNI

Sea el conjunto:

$$H=\left\{c\,/\left(c-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|}\right)(3^x+1)\ge3^{x+1}+3,\forall x\in\mathbb{R}\right\}$$

Hallar el menor elemento de H

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

Problema 186 Seminario CEPRE - UNI

Al resolver la ecuación exponencial:

$$4x^2+3^{\sqrt{x}+1}(x)+5(3^{\sqrt{x}})$$

$$<2x^2(3^{\sqrt{x}})+6x+10$$

Se obtiene como conjunto solución:

$$\left[0\,;\log_a^2 b\right\rangle\cup\langle c\,;\infty\rangle$$

Determine el valor de a + b + 2c

A) 5 B) 7 C) 9
D) 10 E) 12

Problema 187 Seminario CEPRE - UNI

Si $[a\,;b]\cup\{c\}$ es el conjunto solución de la inecuación:

$$(|\log(x)|-2)(|\log(x)+1|-3)\le 0$$

Entonces el valor de $a\cdot b\cdot c$ es:

A) 10^{-6} B) 10^{-4} C) 10^{2}
D) 10^{3} E) 10^{4}

Problema 188 Seminario CEPRE - UNI

Si $\langle a;b\rangle\cup\langle c;d\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación logarítmica.

$\log^2(x)-11|\log(x)|<-10$, determine el valor de $a\cdot b\cdot c\cdot d$

A) 0,1 B) 1 C) 10^{10}
D) 10^{18} E) 10^{20}

Problema 189 Seminario CEPRE - UNI

Sea S el conjunto solución de:

$$\log_7(1+\log_2(3x^2+3x+2))>$$

$$-\log_3(x^8+x^2+3)$$

Entonces podemos afirmar que:

A) $S\subset\langle 0;\infty\rangle$ B) $S=\mathbb{R}$
C) $S\subset\langle-\infty;0]$ D) $S\cap[-2;2]=\phi$
E) $S=\phi$

Problema 190 Seminario CEPRE - UNI

Determine el menor valor de x que satisface la inecuación:

$$(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x)\ge 1$$

A) $2^{-\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\sqrt{2}$ E) $2^{\sqrt{2}}$

Problema 191 Seminario CEPRE - UNI

Si $a^{12}>a^{15}>0$ y M es el conjunto solución de la inecuación:

$$\log_{a^4}(x-3)\le\log_{a^3}((x-3)\sqrt[4]{5-x})$$

Entonces el conjunto M es:

A) $\langle 3\,;5\rangle$ B) $\langle 4\,;6\rangle$ C) $\langle 4\,;5\rangle$
D) $\langle 3\,;3{,}5\rangle$ E) ϕ

Problema 192 Seminario CEPRE - UNI

Determine el siguiente conjunto:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^{2-(\mathrm{Log}_2 x)^2-\mathrm{Log}_2(x)^2}>\frac{1}{x}\right\}$$

en intervalos.

A) $\langle 0\,;1\rangle$ B) $\mathbb{R}$ C) $\langle 0;1/8\rangle$
D) $\langle 0;1/8\rangle\cup\langle 1;2\rangle$ E) $\langle 0;+\infty\rangle$

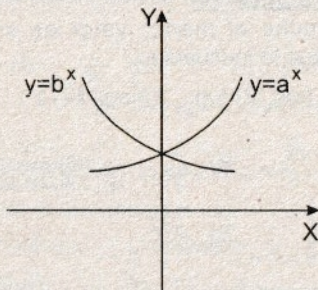
Problema 193 Seminario CEPRE - UNI

La gráfica de cierta función exponencial contiene al punto P(3/2 ; 27). ¿Cuál es la regla de correspondencia e indicar el valor de f(2)?

A) 81 B) 89 C) 90
D) 95 E) 102

Problema 194 Seminario CEPRE - UNI

Se presentan las gráficas de dos funciones exponenciales. Al respecto las desigualdades correctas son:



A) $b > a > 0$ B) $b > 1 \wedge a > 0$
C) $1 > a > b > 0$ D) $a > 1 > b > 0$
E) $1 > a \wedge b > 0$

Problema 195 Seminario CEPRE - UNI

Si en la función f, $f(x) = 2^{ax+1}$, $x \notin \mathbb{R}$ se tiene: para cada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ se cumple, $f(x_1) > f(x_2)$, entonces se puede afirmar que:

A) $1 < a$ B) $-1 < a < 1$
C) $a < 0$ D) No existe **a** real
E) $a \geq 0$

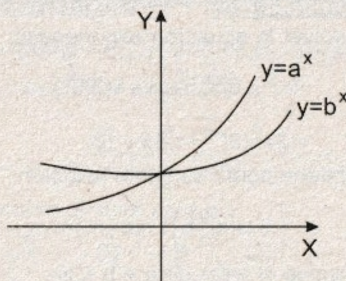
Problema 196 Seminario CEPRE - UNI

Para la función f; $f(x) = 5^{2x-x^2}$, determine el valor real k tal que $|f(x)| \leq k$, $\forall \in \mathbb{R}$.

A) $\frac{1}{125}$ B) $\frac{1}{25}$ C) $\frac{1}{5}$
D) 3 E) 5

Problema 197 Seminario CEPRE - UNI

Respecto a la gráfica de las funciones exponenciales.



Se puede afirmar:
A) $b > a > 0$ B) $1 > a > b > 0$
C) $b > 1 > a > 0$ D) $a > 1 > b > 0$
E) $a > b > 1 > 0$

Problema 198 Seminario CEPRE - UNI

Dada la función f definida por:

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 1}\ ;\ x \in \left[1; +\infty\right\rangle$$

determine $R(f) \cup D(1/f)$

A) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ B) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right\rangle$ C) $\left[1; +\infty\right\rangle$

D) $\left\langle 0; 2\right]$ E) $\left[\frac{4}{5}; +\infty\right\rangle$

Problema 199 Seminario CEPRE - UNI

Respecto a las funciones exponenciales, decir el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Existe una función exponencial $y = f(x) = a^x$ tal que $f(a) < 1$.
II. Existe una función exponencial $y = f(x) = a^x$ tal que $f(a) > 1$.
III. Respecto a las gráficas de las funciones $h(x) = a^x$ y $J(x) = (1/a)^x$; a > 1, una gráfica es simétrica a la otra, respecto al eje Y.



A) VVF B) VFV C) VFF
D) FFF E) VVV

Problema 200 Seminario CEPRE - UNI

Sea:

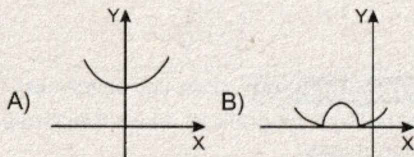
$f(x) = ma^x + n$; $a > 0$, $a \neq 1$, $m \neq 0$, entonces indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

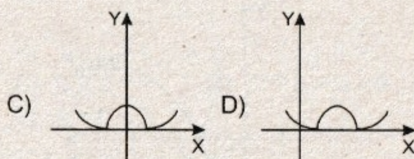
I. Si $a > 1$, entonces la gráfica de f es creciente.
II. La gráfica de f corta al eje Y en el mismo punto $(0 ; m + n)$
III. Si $mn < 0$, entonces la gráfica de f corta al eje X.

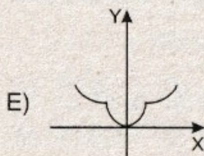
A) VVV B) FVV C) FFV
D) FFF E) VVF

Problema 201 Seminario CEPRE - UNI

La gráfica que mejor representa a f; $f(x) = |e^{|x-2|} - 2|$ es:



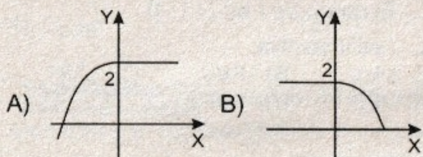


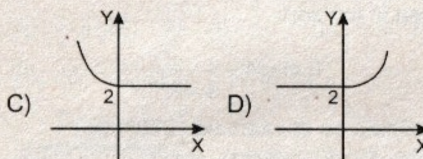


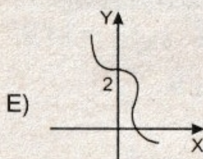
Problema 202 Seminario CEPRE - UNI

Bosqueja la gráfica de:

$$f(x) = e^{|x|} - e^x + 2$$







Problema 203 Seminario CEPRE - UNI

Calcule el valor de $\dfrac{b^6}{a}$ si las gráficas de las funciones:

$f(x) = a^x + b$ y

$g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

se cortan para $x = 0$ y $x = -12$

A) 4 B) 8 C) 16
D) 25 E) 36

Problema 204 Seminario CEPRE - UNI

Dada la función «f» definida por:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $f(x)=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$

II. El rango de f es $\langle -1;1\rangle$

III. f es inyectiva

A) VVV B) FVV C) VVF
D) VFF E) FVF

Problema 205 Seminario CEPRE - UNI

Sea la función:

$$f(x)=4+\frac{3}{4-3^{\text{senx}}}$$

definida en el intervalo $[270°;360°]$.

Entonces los valores mínimo y máximo de la función son respectivamente:

A) -1 y 5 B) 5 y 7 C) -1 y 0

D) $\dfrac{53}{11}$ y 5 E) $\dfrac{37}{11}$ y 5

Problema 206 Seminario CEPRE - UNI

Determine el rango de:

$$f(x)=\left(4-\frac{x}{|x|}\right)\cdot 3^{x-|x|}$$

A) $\langle 0;1\rangle$ B) $[0;5\rangle$ C) $\langle -\infty;5\rangle$

D) $\langle 0;3\rangle$ E) $\langle 0;5\rangle$

Problema 207 Seminario CEPRE - UNI

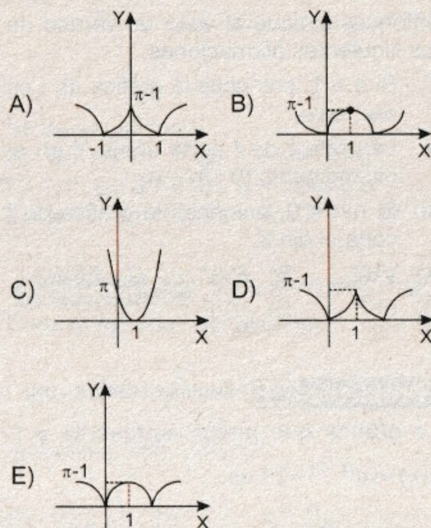
Un accidente automovilistico fue presenciado por $\dfrac{1}{10}$ de los B residentes de un pueblo pequeño.

Si $f(t)=\dfrac{B}{1+ce^{-kt}}$ corresponde al número de residentes que conocía del accidente t horas después ¿Cuántas horas transcurrieron para que la mitad de la población se enterara, si el 25% se enteró a las dos horas?

A) 2 horas B) 6 horas C) 3 horas
D) 8 horas E) 4 horas

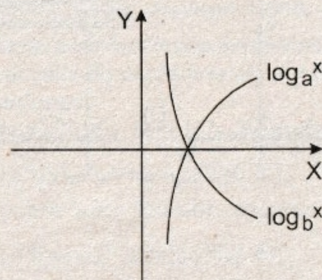
Problema 208 Seminario CEPRE - UNI

¿Cuál de los gráficos es el que mejor representa a: $f(x)=\left|\pi-\pi^{|1-x|}\right|$?



Problema 209 Seminario CEPRE - UNI

Respecto a las gráficas de las funciones logarítmicas:



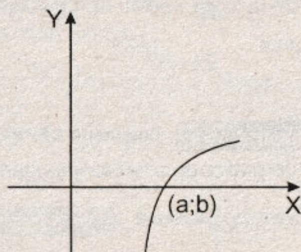
podemos afirmar:

A) $1>b>a>0$ B) $a>b>1$
C) $1>b>0>a$ D) $b>1>a>0$
E) $a>1>b>0$



Problema 210 Seminario CEPRE - UNI

Si luego de graficar $f(x)=\log_7(x-2)$, se obtiene:

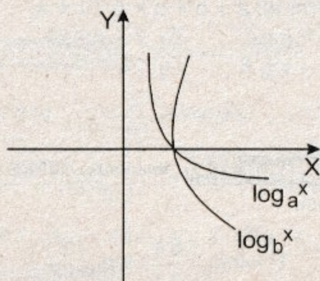


determine $b-a+f(345)$

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Problema 211 Seminario CEPRE - UNI

Respecto a las gráficas de las funciones logarítmicas podemos afirmar que:



A) $1>b>0>a$ B) $1>a>b>0$
C) $b>a>1$ D) $1>b>a>0$
E) $a>b>1$

Problema 212 Seminario CEPRE - UNI

Determine el rango de la función:

$$f(x)=e^{\mathrm{Ln}(2-|x|)}$$

A) $[0;2]$ B) $\langle 0;2]$ C) $[0;2\rangle$
D) $\langle -2;2\rangle$ E) $\langle -2;2]$

Problema 213 Seminario CEPRE - UNI

Si $f(x)=e^x$, halle $f^*(8e)$

A) 8 B) Ln 4
C) 3 Ln2 + 1 D) 2 Ln 2 + 1
E) $\mathrm{Ln}e^3$

Problema 214 Seminario CEPRE - UNI

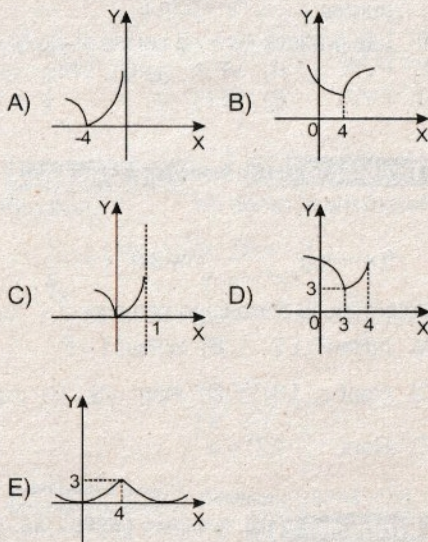
Determine el dominio de:

$$f(x)=\log_4(\log_3(\log_2(8-x)))$$

A) $\langle -\infty;6\rangle$ B) $\langle 0;\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;7\rangle$
D) $\langle 8;\infty\rangle$ E) $\langle -\infty;8\rangle$

Problema 215 Seminario CEPRE - UNI

La figura que mejor representa la gráfica de $f(x)=|\log(4-x)|+3$ es:



Problema 216 Seminario CEPRE - UNI

Calcule la función inversa de:

$$f(x)=\log_3(x-3)+\log_3(x+3)$$

A) $f^*(x)=\sqrt{3^x+9}$

B) $f^*(x)=\sqrt{3^x+1}$

C) $f^*(x)=3^x-1$

D) $f^*(x)=3^x+1$

E) $f^*(x)=\sqrt{3^x-9}$

Problema 217 Seminario CEPRE - UNI

Con respecto a las funciones:

$$f(x)=200+e^{-|x|}$$

$$g(x)=|\ln(x-3)|$$

Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Las gráficas de f y g se cortan en un sólo punto.
II. Las gráficas de f y g se cortan en dos puntos.
III. Las gráficas de f y g cortan al eje Y.

A) FVF B) VFV C) VFF
D) FVV E) FFF

Problema 218 Seminario CEPRE - UNI

Determine el rango de:

$$f(x)=\log_{4x^2+4x+1}(1+2x),\ x>-\frac{1}{2}$$

Determine la afirmación correcta:

A) $n(\text{Ranf})\geq 2$ B) $n(\text{Ranf})=1$

C) $\text{Ranf}\subset[1;8\rangle$ D) $\text{Ranf}=\mathbb{R}$

E) $\text{Ranf}\cap[-1;2\rangle=\phi$

Problema 219 Seminario CEPRE - UNI

Indique el número de soluciones de la ecuación:

$$\left|\text{Log}_2|x|\right|-4+x=0$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Problema 220 Seminario CEPRE - UNI

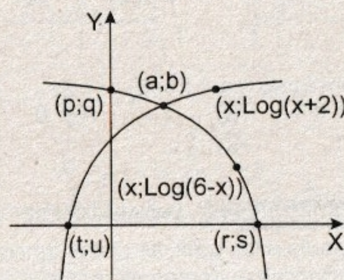
Si $\log_5\log_4\log_3\log_2 x=1$, entonces determine el valor de x.

A) 2^{512} B) 2^{49} C) 3^{512}

D) $2^{3^{1024}}$ E) $5^{3^{1024}}$

Problema 221 Seminario CEPRE - UNI

A partir del gráfico de la funciones logarítmicas.



Determine: a + b + p + q + r + s.

A) 3 + log4 B) 7 + log24
C) 6 + log 6 D) 24
E) 6

Problema 222 Seminario CEPRE - UNI

Reducir:

$$E=\log_2\left(\frac{8}{3}\right)+\log_4\left(\frac{81}{2}\right)+\log_4\left(\frac{16}{5}\right)+\log_{16}\left(\frac{25}{162}\right)$$

A) 6 B) 5,25 C) 5
D) 4,5 E) 4,25

Problema 223 Seminario CEPRE - UNI

Determinar el número de cifras del número:

$$N=2^{11}\cdot 5^{13}\ ;\ \log 2=0{,}30103$$

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 20



Problema 224 Seminario CEPRE - UNI

Determine el valor de verdad de:

I. $\log 2 < \ln 2$

II. La ecuación lnx + logx = 2, tiene solución única.

III. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\};\ \log x^2 = 2\log x$

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FFV

Problema 225 Seminario CEPRE - UNI

Si:

$$10^x + 10^y = p \text{ y } x - y = \log\left(\frac{p+q}{p-q}\right)$$

determine: $10^x - 10^y$

A) $\frac{p+q}{p-q}$ B) $2q$ C) $p-q$
D) q E) $\log p - \log q$

Problema 226 Seminario CEPRE - UNI

Si: $x = 81a$, $y = \frac{a}{81}$ además:

$(\log_a x)^2 + 6(\log_a y) - 7 = 0$, entonces los valores de: $a\log_a y$ y $\log_a x$ son respectivamente.

A) 3 ; – 3; 4 B) 3 ; – 3 ; 5
C) 3 ; 4 ; 5 D) 3 ; 3 ; 5
E) 3 ; 2 ; 5

Problema 227 Seminario CEPRE - UNI

Si f es una función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$. Entonces el conjunto solución de la ecuación $f(f(x)) = 2$ es:

A) {5} B) {4} C) {3}
D) {2} E) {1}

Problema 228 Seminario CEPRE - UNI

Sea:

$$f(x) = 1 + x^{\log x} + x^{\log x^2} + x^{\log x^3} + \ldots + x^{\log x^{n-1}}$$

Halle el valor numérico de $f(10^{\sqrt{2}})$

A) $10^n + \sqrt{2^n}$ B) $\frac{\sqrt{2^n}+1}{\sqrt{2}-1}$

C) $\frac{100^n - 1}{99}$ D) $\frac{100^{n\sqrt{2}}+1}{99\sqrt{2}}$

E) $\frac{100^n + \sqrt{2^n}}{100-\sqrt{2}}$

Problema 229 Seminario CEPRE - UNI

Resolver la ecuación:

$$\left|\mathrm{Ln}|x|\right| + x^2 = 4$$

y dar el número de soluciones reales.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

Problema 230 Seminario CEPRE - UNI

Resolver:

$$\log_{1/4}(2x-5) > -3$$

A) $\left\langle \frac{5}{2};+\infty \right\rangle$ B) $\langle 3;+\infty\rangle$ C) $\left\langle \frac{5}{3};+\infty \right\rangle$

D) $\langle 0;+\infty\rangle$ E) $\left\langle \frac{5}{2};\frac{69}{2} \right\rangle$

Problema 231 Seminario CEPRE - UNI

Determine el conjunto solución de:

$$\log_4(x-3) \le \log_4\left(\frac{1}{2}x+2\right)$$

A) $\langle 0;3\rangle$ B) $\langle 3;6\rangle$ C) $\langle 3;+\infty\rangle$
D) $\langle 2;10]$ E) $\langle 3;10]$

Problema 232 Seminario CEPRE - UNI

Determine el conjunto solución de la inecuación

$$(2^x - x)(5^x + 3^x)(x-2)(3^x - \log_3 x)(2^x - 4) \geq 0$$

A) $\mathbb{R}^-$ B) $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ C) $\mathbb{R}^+$

D) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ E) $\langle 1;\infty \rangle$

Problema 233 Seminario CEPRE - UNI

Indique el número de soluciones reales de la ecuación.

$$\left| \log |x| \right| = \frac{|x+1|}{x+1} 2^x$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Problema 234 Seminario CEPRE - UNI

Resolver:

$$9^{\log_{\sqrt{x}^3}} = 27x$$

De como respuesta la menor de sus soluciones.

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{81}$

Problema 235 Seminario CEPRE - UNI

Resolver:

$$\log_2\left(\log_{1/2}\left(x^2 - 2\right)\right) < 1$$

A) $\left\langle -\sqrt{2} ; \sqrt{2} \right\rangle$

B) $\left\langle -\sqrt{2} ; \sqrt{3} \right\rangle \cup \langle 2;\infty \rangle$

C) $\left\langle -\sqrt{3} ; -\sqrt{2} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2};\sqrt{3} \right\rangle$

D) $\left\langle -\sqrt{3} ; -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2};\sqrt{3} \right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{3}{2};\frac{3}{2} \right\rangle$

Problema 236 Seminario CEPRE - UNI

Determine el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{(0{,}5 + \log_4 x)\log_{1/3} x}{\log_6 x} + \frac{2{,}5}{\log_{2x} 32} > 1$$

y dar el número de soluciones reales.

A) $\left\langle 0 ; \frac{1}{18} \right\rangle$ B) $\left\langle 0 ; \frac{1}{9} \right\rangle$ C) $\left\langle 0 ; \frac{1}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle 0 ; \frac{1}{3} \right\rangle$ E) $\left\langle 0 ; \frac{1}{2} \right\rangle$

Problema 237 Seminario CEPRE - UNI

Determine la función inversa de:

$$f(x) = \log_2(1 + 2^x) \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

A) $f^*(x) = \log(10^x - 1)$, $x > 0$

B) $f^*(x) = \log_2(2^x - 1)$, $x > 0$

C) $f^*(x) = \log_2(2^x + 1)$, $x > 0$

D) $f^*(x) = \log_2(4^x - 1)$, $x > 0$

E) $f^*(x) = \log_2(4^x + 1)$, $x > 0$

Problema 238 Seminario CEPRE - UNI

Si: $\forall x \in [a;b] \cup [c;d]$

$$4^{\sqrt{9-x^2}} + 8 \leq 6\left(2^{\sqrt{9-x^2}}\right)$$

determine el valor de: abcd

A) 40 B) 36 C) 32
D) 30 E) 28



Problema 239 Seminario CEPRE - UNI

Sea S el conjunto solución de:

$$\log_7(1+\log_2(3x^2+3x+2))$$

$$>-\log_3(x^8+x^2+3)$$

entonces podemos afirmar:

A) $S\subset\langle 0;\infty\rangle$ B) $S=\mathbb{R}$

C) $S\subset\langle -\infty;0\rangle$ D) $S\cap[2;2]=\phi$

E) $S=\phi$

Problema 240 Seminario CEPRE - UNI

Sea el conjunto:

$$H=\left\{c/\left(c-\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|}\right)(3^x+1)\geq 3^{x+1}+3,\forall x\in\mathbb{N}\right\}$$

Halle el menor elemento de H.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

Problema 241 Seminario CEPRE - UNI

Si el conjunto solución de la inecuación:

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12(2^{x-1-\sqrt{x^2-5}})+8\leq 0$$

es [a ; b]. Determine 4a – b

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

Problema 242 Seminario CEPRE - UNI

Si p, q, r y t son proposiciones lógicas definidas por:

p : Si $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$, entonces su rango es $\langle 0;1]$.

q : Si $g(x)=7^{|x|}$, entonces su rango es $[1;\infty\rangle$

r : Si $h(x)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{x^2}$, entonces su rango es $\langle 0;1]$.

t : Si $k(x)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-x}$, entonces la función es estrictamente decreciente.

Si M es el número de proposiciones verdaderas y N es el número de proposiciones falsas, entonces la relación correcta entre los valores de M y N es:

A) M = N B) 2M + N = 8

C) N > M D) 2N + M = 8

E) 3N = M

Problema 243 Seminario CEPRE - UNI

Si a < 0 < b < c y $f(x)=\left(\frac{c}{b}\right)^{ax+c}$ con $x\in\mathbb{R}$, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

p : f es creciente

q : f es decreciente

r : f es creciente

A) FFF B) FVV C) FFV

D) VVV E) VFV

Problema 244 Seminario CEPRE - UNI

Si **f** es una función definida por $f(x)=\dfrac{2^x+1}{\sqrt{2^x-5^x}}$, entonces el Dom(f) es:

A) $\langle -\infty;0\rangle$ B) $\langle 0;\infty\rangle$ C) $\mathbb{R}-\{1\}$

D) $\mathbb{R}$ E) $\langle 1;\infty\rangle$

Problema 245 Seminario CEPRE - UNI

Si [a ; b] es el rango de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definido por:

$f(x)=2^{|x-3|-|x+1|}\ \forall x\in\mathbb{R}$, entonces el valor de ab es:

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{24}$ E) 1

Problema 246 Seminario CEPRE - UNI

Si **f** es una función por $f(x)=\dfrac{\pi^{-|x-2|}}{1+\pi^{-|x-2|}}$,

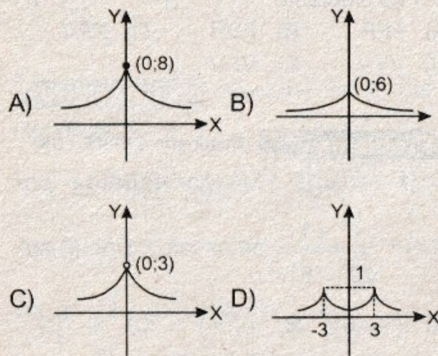
entonces en Ran(f) es:

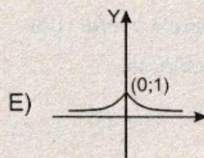
A) $\langle 0;1/2]$ B) $\langle 0;1]$ C) $\langle 0;2]$

D) $\langle 0;\infty\rangle$ E) $\mathbb{R}$

Problema 247 Seminario CEPRE - UNI

Si **f** es una función definida por $f(x)=2^{3-|x|}$ con $x\in\mathbb{R}$, entonces la gráfica de **f** es:





Problema 248 Seminario CEPRE - UNI

Si B es una función definida por

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2+1-4x}$$

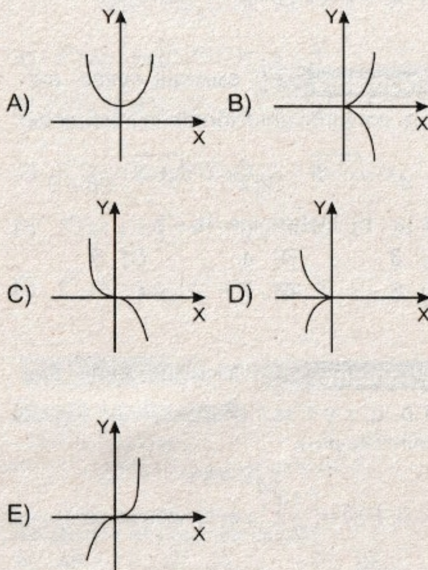
entonces el rango de **f** es.

A) $\langle 0;1\rangle$ B) $\{1\}$ C) $\langle -1;1\rangle$

D) $\langle 1;2\rangle$ E) $\langle 0;\infty\rangle-\{1\}$

Problema 249 Seminario CEPRE - UNI

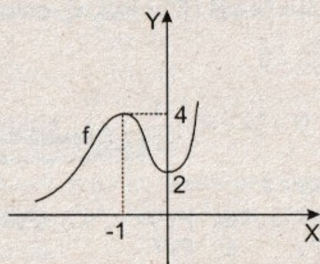
Si **f** es una función definida por $f(x)=e^{x}-e^{-x}$ con $x\in\mathbb{R}$, entonces la gráfica de f es:



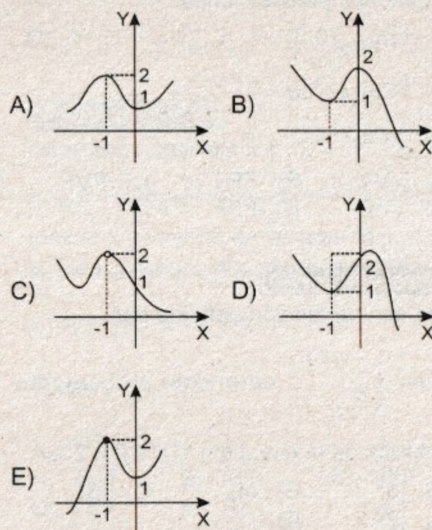


Problema 250 Seminario CEPRE - UNI

En la figura adjunta se muestra la gráfica de **f**.



Entonces, la figura que mejor representa la gráfica de $g(x) = \log_2(f(x))$ es:



Problema 251

Si f es una función definida por

$f(x) = \dfrac{3^x}{1+3^x}$, entonces el rango de f es:

A) $\langle -\infty;0]$ B) $\langle 1;+\infty\rangle$ C) $\langle 0;+\infty\rangle$

D) $\langle 0;1\rangle$ E) $\langle 0;2\rangle$

Problema 252

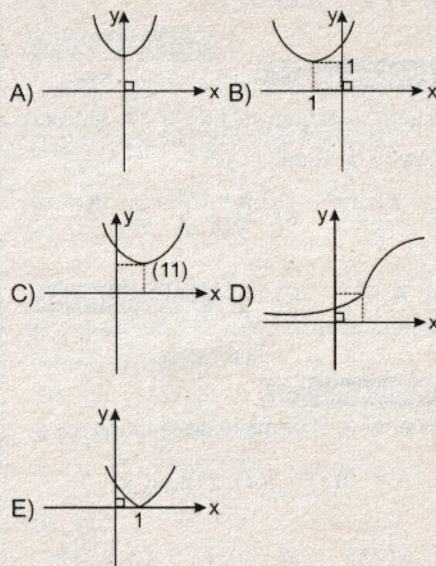
Sea $f: I \to \left[\dfrac{1}{2},2\right]$ la función suryectiva definida por $f(x) = 2^{1-|x|}$. Halle un intervalo I, siendo I el dominio de f.

A) $[2;4]$ B) $[-1;3]$ C) $[-2;2]$

D) $[0;4]$ E) $[1;4]$

Problema 253

Si f es la función definida por $f(x) = 2^{|1-x|} - 1$, la figura que mejor representa la gráfica de f es:



Problema 254

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $5^x < \text{Log}_5 x$, $\forall x > 0$

II. $e^{\text{Ln}x^2} = 2x$, $\forall x > 0$

III. Si $a^x > b^x$, $\forall x < 0 \rightarrow 0 < b < a < 1$

A) VVV B) VVF C) FVV
D) VFF E) FFF

Problema 255

Si $0 < a < b$ y $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-ax+b}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. f es creciente
II. f es decreciente
III. f es constante en $\langle 0;\infty\rangle$

A) VVF B) FVF C) VFF
D) FFV E) FFF

Problema 256

Si $\text{Log}_6 x = B\,\text{Log}_3 x$ y $\text{Log}_2 3 = A$, entonces el valor de B es:

A) $\frac{A+1}{A}$ B) $\frac{A}{2}$ C) $\frac{A}{3}$
D) $A+1$ E) $\frac{A}{A+1}$

Problema 257

Determine el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{(4-2^x)\text{Log}_2 x}$$

A) $\langle 2;3]$ B) $[1;2]$ C) $\left[\frac{3}{2};2\right]$
D) $\left\langle 0;\frac{1}{2}\right]$ E) $\left[\frac{3}{4};2\right]$

Problema 258

Indicar el valor de verdad de las siguientes propiedades.

I. Si $P = \{x \in R \,/\, \text{Log}_2 x = -x\}$, entonces $n(P) = 1$.

II. Si $Q = \{x \in R \,/\, 2^x = \log_2 x\}$, entonces $n(Q) = 0$.

III. Si $R = \left\{x \in R \,/\, \left(\frac{1}{2}\right) = x\right\}$, entonces $n(R) = 1$.

A) VFV B) FVV C) VVF
D) VVV E) FVF

Problema 259

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\text{Log}_{1/2}(0.3) > 1$

II. $\text{Log}_{1/5}(0.3) < 1$

III. $5^{\text{Log}_5 x} = x$, $\forall x > 0$

A) VVV B) FFV C) FVF
D) VFF E) FFF

Problema 260

Si f es una función definida por:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$, entonces el conjunto solución de la ecuación $f(f(x)) = 2$ es:

A) {5} B) {4} C) {3}
D) {2} E) {1}

Problema 261

Se sabe que el número de alces, en una reserva, al final de t años esta dado por la fórmula: $M(t) = k(0,9)^t$. Si en la reserva se inició con cien alces, estime el número de animales vivos después de 5 años.

A) 51 B) 59 C) 63
D) 72 E) 90



Problema 262

Halle la suma de valores de x que resuelve la ecuación

$\text{Log}16 + \text{Log}x + \text{Log}(x-1) = \text{Log}(x^2-4) + \text{Log}15$

A) 8 B) 9 C) 16
D) 20 E) 31

Problema 263

Si a y b son las raíces positivas de la ecuación: $x^2 - 3x + m^2 = 0$, entonces el valor de:

$E = \log_m a^b + \log_m a^a + \log_m b^b + \log_m b^a$, es:

A) -6 B) $\frac{1}{6}$ C) 2
D) 3 E) 6

Problema 264

Dada la ecuación

$\text{Log}_8 x + \text{Log}_4 \sqrt{x} + \text{Log}_2 \sqrt[3]{x} = 5,5$ ..(*)

Indicar los valores de verdad de p, q y r; si S = conjunto solución de (*)

$p: S \subset \{2^n / n = 1,2,3,4\}$

$q: n(P(S)) = 64$

$r: n(S) = 6$

A) FVF B) FFV C) VFF
D) FFF E) FVV

Problema 265

Si S es el conjunto solución de la ecuación $e^x = x$, entonces el conjunto S es:

A) $\{(n(e+1)\}$ B) $\{\sqrt{e}\}$
C) $\{\sqrt[e]{e}\}$ D) $\{\sqrt[2]{Lne}\}$
E) ϕ

Problema 266

El conjunto solución de la inecuación $9^{|x-3|} - 23(3^{|x-3|}) < 108$, es:

A) $\langle -3;3 \rangle$ B) $\langle 0;8 \rangle$ C) $\langle -3;0 \rangle$
D) $\langle 0;6 \rangle$ E) $\langle 8;\infty \rangle$

Problema 267

Si $\langle b,a \rangle$ es el conjunto solución de la inecuación $2^{3x} + 45 < 9(2^x) + 5(4^x)$, halle 2^a.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Problema 268

Resolver y hallar el valor de x en:

$$\frac{1}{\text{Log}_{(x+3)}10} + \frac{1}{\text{Log}_{(x+1)}10} = \text{Log}15$$

A) 2 B) 4 C) 7
D) 9 E) 11

Problema 269

Si T es el conjunto solución de la siguiente ecuación exponencial:

$|2^x + 1| - |2^x + 2| + |2^x + 3| = 10$,

entonces el conjunto T es:

A) $\{-1\}$ B) $\{2\}$ C) $\{3\}$
D) $\{4\}$ E) $\{5\}$

Problema 270

El conjunto solución de la inecuación

$\text{Log}_4(x-3) \leq \text{Log}_4\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$ es:

A) $\langle 2;5]$ B) $\langle 3;10]$ C) $[4;12\rangle$
D) $[12;15\rangle$ E) $\langle 7;14]$

Problema 271

Dada la función f tal que $f(x) = e^{-x} + x - 2$ y los siguientes enunciados:

I. Tiene una raíz única.

II. En el intervalo $[-2; -1]$ existe una sola raíz.

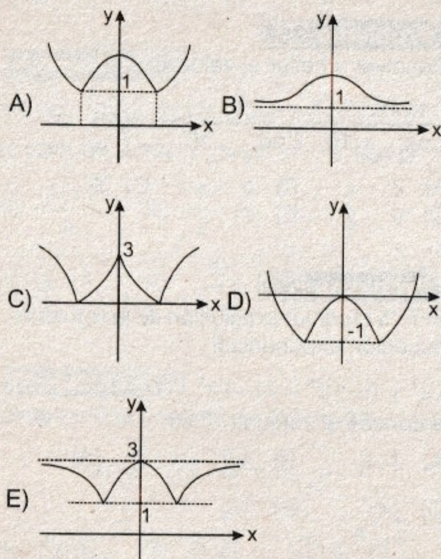
III. En el intervalo $[1; 2]$ existe solo una raíz.

¿Son correctos?

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) II y III E) I y III

Problema 272

¿Cuál de los gráficos corresponde a $f(x) = |3^{1+|x|} - 4| - 1$?



Problema 273

Determine el cominio de la función f, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \log_3\left(\sqrt{\frac{9 - x^2}{9}} + 3\right) + \log_5(2x + 1)$$

A) $\left\langle -\frac{1}{2}; 1\right]$ B) $\left\langle -\frac{1}{2}; 3\right]$ C) $\langle 3; 4]$

D) $\langle -1; 3]$ E) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty\right]$

Problema 274

Sea $f(x) = \log_{(x+4)}(x^2 - 1)$

Determine el dominio maximal

A) $\langle -4; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle - \{-3\}$

B) $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

C) $\langle 1; +\infty\rangle$

D) $\langle 1; 4\rangle$

E) $\langle -4; -1\rangle$

Problema 275

Sea $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + 4}$, determine $f^*(x)$ indicando su dominio.

A) $f^*(x) = \log_2\left(\frac{4x}{1-x}\right), x \in \langle 0, 1\rangle$

B) $f^*(x) = \log_2\left(\frac{4x}{1-x}\right), x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$

C) $f^*(x) = \log_2\left(\frac{4x}{2-x}\right), x \in \langle 0, 2\rangle$

D) $f^*(x) = \log_2\left(\frac{x}{2-x}\right), x \in \langle 0, 2\rangle$

E) $f^*(x) = \log_2\left(\frac{3x}{3-x}\right), x \in \langle 0, 3\rangle$

Problema 276

Determine cula(es) de los siguientes enunciados son correctos:



I. El logaritmo en base $\sqrt{2}$ de 16 es 24.

II. Si $\lg_x\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{2}{3}$ entonces $x = \frac{8}{15}$.

III. La gráfica de $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ es simétrica respecto al origen.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

Problema 277

Se define la función:

$f: A \to R$ tal que:

$$f(x) = 3\sqrt{2^{x-31}} - 5\sqrt{2^{x-35}} + \log_{3\sqrt[5]{2}}(1/2)^{1/2}$$

Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctas:

I. f es creciente

II. $\text{Dom}(f) = \left[35 + \log_2 25; +\infty\right\rangle$

III. $f(x) \geq 0$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I, II y III E) I y II

Problema 278

Si $\log_a(\log_a b) - \log_a(\log_a c) = 1$ calcule

$\log_a(\log_b N) - \log_a(\log_c N)$

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

Problema 279

En la escala de Richter, la intensidad M de un terremoto, se relaciona con su energía E(en ergios) por medio de la fórmula:

$$\text{Log}E = 11{,}4 + 1{,}5M$$

Si un terremoto tiene 1000 veces la energía que otro, ¿cuántas veces mayor es su índice de Richter M?

A) Dos unidades mas que el primero
B) Tres unidades más que el primero
C) Cuatro unidades mas que el primero
D) Cinco unidades más que el primero
E) Seis unidades más que el primero

Problema 280

Considere la función:

$$f(x) = e^{1+\text{Ln}(1-|x|)},\ x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right\rangle$$

determine el rango de f.

A) $\left\langle \frac{e}{4}; \frac{e}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{e}{2} \right]$ C) $\left\langle 0; e \right]$

D) $\left\langle \frac{e}{2}; e \right]$ E) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right]$

Problema 281

Sea f una función cuya regla de correspondencia es $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\ln x - 1}\right)$; si $x \in \langle e ; \infty \rangle$.

Determine el rango de la función.

A) $\langle 0 ; \infty \rangle$ B) $\langle e ; \infty \rangle$ C) $\langle 1 ; \infty \rangle$

D) R E) R_0^+

Problema 282

Simplificar:

$$E = \left[\frac{\sqrt[3]{\log 2} + \sqrt[3]{\log 3} + \sqrt[3]{\log 4} + \ldots + \sqrt[3]{\log 100}}{\sqrt[3]{\log_5 2} + \sqrt[3]{\log_5 3} + \sqrt[3]{\log_5 4} + \ldots + \sqrt[30]{\log_5 100}}\right]^3$$

A) log1 B) log2 C) log3
D) log5 E) log10

Problema 283

Si $\forall x \in M$: $3(10^x - 6^{x+2}) + 4(10^{x+1}) = 5(10^{x-1} + 6^{x-1})$, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. $n(M) = 1$ II. $M \subset Z$

III. $M \cap R = \text{Log}_{5/3}\left(\frac{653}{255}\right)$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

Problema 284

Resolver:

$$\sqrt{(3+\sqrt{8})^x}+\sqrt{(3-\sqrt{8})^x}\le 34$$

A) $-3\le x\le 3$ B) $-4\le x\le 4$
C) $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ D) $\sqrt{8}\le x\le 2\sqrt{8}$
E) $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$

Problema 285

Determine x en:

$\log_2(\log_4(\log_2 x))+\log_4(\log_2(\log_2 x))=2$

A) 2 B) 2^2 C) 2^3
D) 2^8 E) 2^{16}

Problema 286

Si $x-\log_2 x=2$

Calcule: $x+\log_2 x$

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Problema 287

Calcule el número de soluciones de la ecuación:

$$-|x-4|+3=|\log|x-4||$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 6

Problema 288

Dada la siguiente ecuación:

$(\text{Ln}x+1)^{\text{Ln}e.x^2}=2$, determine el valor de $T=e.x^4$.

A) e^{-2} B) e^{-3} C) e^{-4}
D) e^{-5} E) e^{-6}

Problema 289

Si α es la raíz real de la ecuación:

$(\log 2)x^3+(\log 12)x^2+(\log 27)x+\log 9=0$

entonces se cumple:

A) $-1<\alpha<0$ B) $\alpha<-1$
C) $\alpha=2$ D) $2<\alpha<3$
E) $\alpha>3$

Problema 290

Indique un intervalo del conjunto solución, al resolver:

$$4^{x-1}+1\ge 17(2^{x-3})$$

A) $\langle -1,0]$ B) $\langle -3,-2\rangle$ C) $[3,\infty\rangle$
D) $\langle -1,0\rangle$ E) $\langle -3,-1\rangle$

Problema 291

Resolver:

$$2(4^x)-2^x(5)+2<0$$

A) $\langle 0;\infty\rangle$ B) $\langle 1;\infty\rangle$ C) $\langle -2;2\rangle$
D) $\langle -1;1\rangle$ E) $\langle 2;\infty\rangle$

Problema 292

Al resolver:

$2^{|x+2|}+|2^{x+1}+1|\le 2^{x+1}+3$ se obtiene:

A) $[2,3]$ B) $[-1,1]$ C) $[-3,-1]$
D) $[1,+\infty\rangle$ E) $\langle 0,+\infty\rangle$

Problema 293

Si el conjunto

$$A=\left\{x\in\langle 1;\infty\rangle / x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0\right\}$$

viene la forma $\langle m;\infty\rangle$. Determine el valor de m.

A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6



Clave

1 A	31 C	61 A	91 D	121 B	151 D	181 E	211 B	241 D	271 D
2 D	32 C	62 A	92 C	122 C	152 C	182 E	212 B	242 A	272 D
3 D	33 B	63 B	93 A	123 A	153 E	183 B	213 C	243 B	273 B
4 C	34 C	64 B	94 C	124 D	154 D	184 E	214 A	244 A	274 A
5 A	35 E	65 A	95 D	125 B	155 A	185 D	215 D	245 E	275 A
6 A	36 E	66 E	96 D	126 E	156 C	186 D	216 A	246 A	276 C
7 B	37 D	67 C	97 A	127 D	157 A	187 B	217 A	247 A	277 A
8 D	38 A	68 A	98 D	128 E	158 C	188 B	218 B	248 B	278 B
9 C	39 B	69 B	99 D	129 B	159 A	189 B	219 D	249 D	279 A
10 A	40 B	70 E	100 C	130 E	160 D	190 A	220 D	250 E	280 D
11 C	41 B	71 E	101 A	131 D	161 A	191 A	221 D	251 D	281 D
12 E	42 A	72 B	102 C	132 C	162 E	192 D	222 E	252 C	282 D
13 A	43 B	73 D	103 A	133 C	163 D	193 A	223 A	253 E	283 E
14 A	44 D	74 E	104 C	134 E	164 B	194 D	224 B	254 D	284 B
15 C	45 C	75 D	105 E	135 E	165 D	195 C	225 D	255 C	285 E
16 B	46 D	76 B	106 A	136 C	166 A	196 E	226 B	256 E	286 B
17 E	47 E	77 D	107 E	137 B	167 C	197 E	227 D	257 B	287 D
18 B	48 D	78 B	108 B	138 D	168 C	198 C	228 C	258 D	288 A
19 C	49 B	79 E	109 E	139 D	169 A	199 E	229 D	259 A	289 B
20 C	50 C	80 C	110 A	140 D	170 D	200 B	230 E	260 D	290 C
21 B	51 A	81 A	111 A	141 A	171 C	201 C	231 E	261 B	291 D
22 B	52 D	82 D	112 A	142 A	172 E	202 C	232 C	262 C	292 C
23 D	53 D	83 C	113 A	143 A	173 D	203 D	233 B	263 E	293 A
24 C	54 A	84 B	114 A	144 A	174 B	204 A	234 E	264 D	
25 C	55 C	85 C	115 E	145 D	175 B	205 D	235 D	265 E	
26 B	56 A	86 E	116 E	146 C	176 E	206 E	236 A	266 D	
27 D	57 C	87 C	117 D	147 A	177 D	207 E	237 B	267 E	
28 E	58 E	88 E	118 B	148 B	178 D	208 E	238 A	268 A	
29 C	59 B	89 C	119 C	149 A	179 C	209 E	239 B	269 C	
30 E	60 C	90 C	120 B	150 B	180 B	210 C	240 D	270 B	

- Noción de potencia en el conjunto $\mathbb{R}$
- Función exponencial
- Logaritmación en $\mathbb{R}$
- Función logarítmica
- Sistema de logaritmos
- Cologaritmo y antilogaritmo
- Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas
- Reglas Adicionales
- Problemas Resueltos
- Problemas Propuestos

Colección Lambda

- **Lógica y conjuntos.**
- **Expresiones algebraicas I.**
- **Expresiones algebraicas II.**
- **Radicación y potenciación.**
- **Análisis combinatorio, probabilidades.**
- **Números complejos.**
- **Ecuaciones I.**
- **Ecuaciones II.**
- **Números reales, desigualdades e inecuaciones.**
- **Relaciones y funciones.**
- **Logaritmación en $\mathbb{R}$.** -
- **Limites y derivadas**
- **Sucesiones y series.**
- **Matrices y determinantes.** F
- **Introducción a la programación lineal en $\mathbb{R}^2$**



Jr. Rufino Torrico 889 Of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110 / 726-4141
RPC: 989-101631 / 997-894292 RPM: #995-739126
www.editorialmegabyte.com

